工程数学

25-26年度第二学期

网络授课

课程号：00330760 工能必修+航材生限选+双培

2026.04

7 拉普拉斯变换

本章介绍Laplace变换的概念、性质以及Laplace逆变换. 最后给出Laplace变换一些应用的例子.

Fourier变换在许多领域中发挥着重要的作用, 但是在通常意义下, Fourier变换存在的条件需要实函数$f(t)$在$(-\infty,+\infty)$上绝对可积. 很多常见的初等函数(例如，常数函数、多项式函数、正弦与余弦函数等)都不满足这个要求. 另外，很多以时间t为为自变量的函数，当$t<0$时，往往没有定义，或者不需要知道$t<0$的情况. 因此, Fourier变换在实际应用中受到一些限制.

复变函数：第七章：拉普拉斯变换

当函数$f(t)$在$t<0$时没有定义或者不需要知道时，可以认为当$t<0$时，$f(t)\equiv 0$. 这时, Fourier变换的表达式为

$$\mathscr{F}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t.$$

但是仍然需要$f(t)$在 $[0,+\infty)$ 上绝对可积的条件，这个要求限制了它的应用.

对定义在 $[0,+\infty)$ 上的函数 $f(t)$, 如果考虑

$$f_1(t) = f(t)e^{-\beta t} \quad (\beta > 0),$$

那么 $f_1(t)$ 容易满足在 $[0,+\infty)$ 上绝对可积的要求. 例如，$f(t)$ 为常数、多项式、正弦与余弦函数时，

$$f_1(t) = f(t)e^{-\beta t} \quad (\beta > 0)$$

复变函数：第七章：拉普拉斯变换

都在 $[0,+\infty)$ 上绝对可积. 这是因为 $t\to+\infty$ 时， $e^{-\beta t}$ 是衰减速度很快的函数，称它为指数衰减函数.

如果 $\beta>0$ 取得适当大，那么 $f_1(t)=\begin{cases} f(t)e^{-\beta t}, & t\ge 0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$

的Fourier变换可能有意义. $f_1(t)$ 的Fourier变换可表示为

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-\beta t}e^{-i\omega t}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-(\beta+i\omega)t}\mathrm{d}t.$$

将 $\beta+i\omega$ 记为s, 可写成

$$F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t.$$

这就是本章要讨论的Laplace变换, 它放宽了对函数的限制并使之更适合工程实际，并且仍然保留Fourier变换中许多好的性质，更实用、更方便.

7.1 Laplace变换的概念

1　Laplace变换的定义

2　周期函数和δ函数的Laplace变换

7.1.1 Laplace变换的定义

定义7.1　设 $f(t)$ 在 $t \geq 0$ 上有定义, 并且积分 $F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$ (s是复参变量)关于某一范围 s 收敛，则由这个积分确定的函数

$$F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t,$$

称为函数 $f(t)$ 的Laplace变换, 并记做 $\mathcal{L}\,[f(t)]$, 即

$$\mathcal{L}\,[f(t)]=F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t.$$

$F(s)$ 称为 $f(t)$ 的像函数，$f(t)$ 称为 $F(s)$ 的像原函数.

已知 $F(s)$ 是 $f(t)$ 的Laplace变换，则记

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)],$$

并称 $f(t)$ 为 $F(s)$ 的Laplace逆变换.

例7.1 求单位阶跃函数 $u(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}$ 的Laplace变换.

解 根据Laplace变换的定义， 当 $\mathrm{Re}\,s>0$ 时，

$$\mathscr{L}[u(t)]=\int_0^{+\infty}e^{-st}\mathrm{d}t=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{s}.$$

因为在Laplace变换中不必考虑 $t<0$ 时的情况，

所以经常记作 $\mathscr{L}[1]=\dfrac{1}{s}.$

例7.2 求指数函数 $f(t)=e^{at}$ (其中a是实数) 的Laplace变换.

解 根据Laplace变换的定义

$$F(s)=\mathcal{L}[f(t)]=\mathcal{L}[e^{at}]=\int_0^{+\infty} e^{at}e^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t}\mathrm{d}t,$$

这个积分当 $\mathrm{Re}\,s>a$ 时收敛，且

$$\int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t}\mathrm{d}t=\frac{1}{s-a},$$

所以

$$\mathcal{L}[e^{at}]=\frac{1}{s-a}\quad(\mathrm{Re}\,s>a).$$

Laplace变换存在定理

定理7.1 设函数 $f(t)$ 在 $t \geq 0$ 的任何有限区间内分段连续，并且当 $t \to +\infty$ 时，$f(t)$的增长速度不超过某一指数函数，即存在常数 $M > 0$ 和 $s_0 > 0$，使得在 $[0,+\infty)$ 上，

$$|f(t)| \leq Me^{s_0 t},$$

则在半平面 $\mathrm{Re}\, s > s_0$ 上，$\mathcal{L}\,[f(t)]$ 存在，且

$$F(s) = \mathcal{L}\,[f(t)]$$

是s的解析函数，其中 s_0 称为 $f(t)$的增长指数.

证明 对任何 $\mathrm{Re}\,s > s_0$ 内的点s，$\mathrm{Re}\,s = \beta > s_0$，故 $F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$

绝对收敛，即

$$\int_0^{+\infty} \left| f(t)e^{-st} \right| \mathrm{d}t \le \int_0^{+\infty} M e^{-\beta t} e^{s_0 t} \mathrm{d}t$$

$$\le M\int_0^{+\infty} e^{-(\beta - s_0)t}\mathrm{d}t = \frac{M}{\beta - s_0}.$$

所以在 $\mathrm{Re}\,s > s_0$ 上，$f(t)$ 的Laplace变换存在.

可以证明 $F(s)$ 是 $\mathrm{Re}\,s > s_0$ 上的解析函数, 且 $F'(s) = \int_0^{+\infty} (-t) f(t)e^{-st}\mathrm{d}t.$

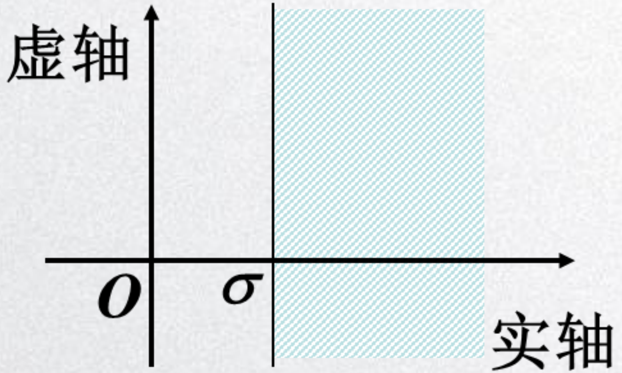
类似于幂级数中 **Abel定理** 有下面定理.

定理7.2 如果 $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$ 在 $s_1=\beta_1+i\omega_1$ 处收敛，则这个积分在 $\mathrm{Re}\,s>\beta_1$ 上处处收敛，且由这个积分确定的函数 $F(s)$ 在 $\mathrm{Re}\,s>\beta_1$ 上解析；

如果 $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$ 在 $s_2=\beta_2+i\omega_2$ 处发散，则这个 积分在 $\mathrm{Re}\,s<\beta_2$ 上处处发散.

根据定理7.2，存在实数σ(或是±∞)使得在$\mathrm{Re}\,s>\sigma$上, 积分$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$收敛, 而在$\mathrm{Re}\,s<\sigma$上，积分$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$处处发散. 在收敛区域内，

Laplace变换的像函数 $F(s)=\mathcal{L}\,[f(t)]$是s的解析函数.



例7.3 求 $f(t)=\sin\omega t$ 的Laplace变换.

解 因为 $|f(t)|\le 1\cdot e^{0}$，故在 $\operatorname{Re}s>0$ 上，Laplace变换存在，且

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}\sin\omega t dt=\frac{e^{-st}}{s^2+\omega^2}[-s\sin\omega t-\omega\cos\omega t]\Big|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{\omega}{s^2+\omega^2},$$

于是 $\mathcal{L}[\sin\omega t]=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}\quad(\operatorname{Re}s>0).$

类似可得 $\mathcal{L}[\cos\omega t]=\dfrac{s}{s^2+\omega^2}\quad(\operatorname{Re}s>0).$

例7.4 求 $f(t)=t^{\alpha}\quad(\alpha>-1)$的Laplace变换.

解 如果α是正整数 m, 则由分部积分法, 易求得

$$\mathcal{L}\left[t^{m}\right]=\frac{m!}{s^{m+1}}\ (\mathrm{Re}\,s>0).$$

当$\alpha>-1$ 不是正整数时，利用复变函数论的方法, 可求出

$$\mathcal{L}\,[t^{\alpha}]=\frac{1}{s^{\alpha+1}}\Gamma(\alpha+1)\ \ (\mathrm{Re}\,s>0),$$

其中$\Gamma(\alpha+1)=\int_{0}^{+\infty}x^{\alpha}e^{-x}\mathrm{d}x$ 是Γ函数.

7.1.2 周期函数和d函数的Laplace变换

设 $f(t)$是以T为周期的函数，即

$$f(t+T)=f(t)\quad(t>0),$$

且在一个周期内分段连续，则

$$\mathscr{L}\,[f(t)]=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{kT}^{(k+1)T} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t.$$

令 $t=\tau+kT,\ \ \tau\in[0,\ T)$，则 $\displaystyle\int_{kT}^{(k+1)T} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^T f(\tau+kT)e^{-s(\tau+kT)}\mathrm{d}\tau,$

复变函数：第七章：拉普拉斯变换

$$\int_{kT}^{(k+1)T} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t = e^{-kTs}\int_0^T f(\tau)e^{-s\tau}\mathrm{d}\tau.$$

而当 $\mathrm{Re}\,s>0$ 时，$\left|e^{-Ts}\right|<1$，所以

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{kT}^{(k+1)T} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kTs}\int_0^T f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T f(t)e^{-st}\mathrm{d}t,$$

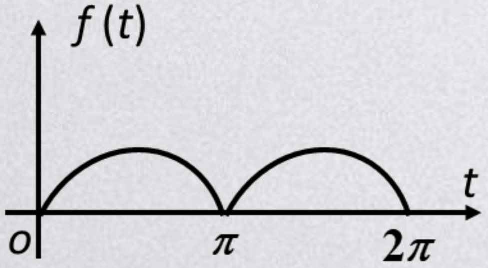
于是

$$\mathcal{L}\,[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T f(t)e^{-st}\mathrm{d}t.$$ 这就是周期函数的Laplace变换公式.

例7.5　求全波整流函数 $f(t)=|\sin t|$ 的Laplace变换.

解　$f(t)$ 的周期 $T=\pi$,

所以由**周期函数的Laplace变换公式**



$$\mathcal{L}[f(t)]=\frac{1}{1-e^{-\pi s}}\int_0^{\pi}e^{-st}\sin t\,dt$$

$$=\frac{1}{1-e^{-\pi s}}\left[\frac{e^{-st}}{s^2+1}(-\sin t-\cos t)\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{1-e^{-\pi s}}\times\frac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1}=\frac{1}{s^2+1}\operatorname{cth}\frac{\pi s}{2}.$$

如果满足Laplace变换存在条件的函数 $f(t)$ 在 $t=0$ 处有界时，积分

$$\mathcal{L}[f(t)]=\int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

的下限取 0^{+} 或 0^{-} 不影响其结果. 如果在 $t=0$ 处包含单位脉冲函数 $\delta(t)$, 积分理解为广义函数下的积分时，取 0^{+} 与 0^{-} 是不同的. 因为

$$\mathcal{L}_{+}[f(t)]=\int_{0^{+}}^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t,$$

$$\mathcal{L}_{-}[f(t)]=\int_{0^{-}}^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t=\int_{0^{-}}^{0^{+}} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t+\mathcal{L}_{+}[f(t)].$$

复变函数：第七章：拉普拉斯变换

如果$f(t)$在$t=0$附近有界或在通常意义下可积时，

$$\int_{0^-}^{0^+} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t=0,\ \text{即}\ L_-[f(t)]=L_+[f(t)];$$

如果在 $t=0$ 处包含了单位脉冲函数时，则

$$\int_{0^-}^{0^+} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t\neq 0,\ \text{即}\ L_-[f(t)]\neq L_+[f(t)].$$

因此把 $t\geq 0$ 上定义的函数延拓到 $t<0$ 上，并且把Laplace变换定义为

$$L[f(t)]=L_-[f(t)]=\int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t.$$

例7.6　求单位脉冲函数 $\delta(t)$ 的Laplace变换.

解　因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)\mathrm{d}t = f(0),$$

所以

$$\mathscr{L}[\delta(t)] = \mathscr{L}_{-}[\delta(t)]$$

$$= \int_{0^-}^{+\infty}\delta(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)e^{-st}\mathrm{d}t = 1.$$

例7.7　求 $f(t)=e^{-\beta t}\delta(t)-\beta e^{-\beta t}u(t)\ \ (\beta>0)$的Laplace变换(其中$u(t)$为单位阶跃函数).

解　由Laplace变换的定义，当　$\mathrm{Re}\,s>-\beta$ 时，

$$\mathcal{L}\,[f(t)]=\int_{0^-}^{+\infty}\left[e^{-\beta t}\delta(t)-\beta e^{-\beta t}u(t)\right]e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{0^-}^{+\infty}\delta(t)e^{-(s+\beta)t}\mathrm{d}t-\beta\int_{0}^{+\infty}e^{-(s+\beta)t}\mathrm{d}t$$

$$=1+\beta\left.\frac{e^{-(\beta+s)t}}{s+\beta}\right|_{0}^{+\infty}=1-\frac{\beta}{s+\beta}=\frac{s}{s+\beta}.$$

7.2 Laplace变换的性质

1	线性性质	2	微分性质
3	像函数的微分性质	4	积分性质
5	像函数的积分性质	6	位移性质
7	延迟性质	8	相似性质
9	初值和终值定理	10	卷积定理

复变函数：第七章：拉普拉斯变换

以下假定所考虑的 Laplace 变换的像原函数都满足存在定理的条件.

(1) 线性性质　　设α, β是常数，$F_1(s)=\mathcal{L}[f_1(t)], F_2(s)=\mathcal{L}[f_2(t)]$，则

$$\mathcal{L}[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)]=\alpha F_1(s)+\beta F_2(s)$$

$$=\alpha\mathcal{L}[f_1(t)]+\beta\mathcal{L}[f_2(t)],$$

$$\mathcal{L}^{-1}[\alpha F_1(s)+\beta F_2(s)]=\alpha\mathcal{L}^{-1}[F_1(s)]+\beta\mathcal{L}^{-1}[F_2(s)].$$

由Laplace变换的定义及积分的线性性质可证.

(2) 微分性质　　设 $F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$，则

$$\mathscr{L}[f'(t)]=sF(s)-f(0).$$

证明　根据Laplace变换的定义和分部积分公式

$$\mathscr{L}[f'(t)]=\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=f(t)e^{-st}\Big|_0^{+\infty}+s\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=s\mathscr{L}[f(t)]-f(0)$$

$$=sF(s)-f(0)\quad(\mathrm{Re}\,s>s_0).$$

推论　对正整数n, 有

$$\mathcal{L}\,[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).$$

特别地，当 $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$ 时，

$$\mathcal{L}\,[f^{(n)}(t)] = s^n F(s).$$

在这个性质中，要求 $f^{(k)}(t)$ 存在且满足Laplace 变换存在定理的条件 $(1 \le k \le n)$.

(证明)

例7.8　求 $f(t)=\cos\omega t$ 的Laplace变换.

解　因为

参见例7.3，与这里方法不同

$$f(0)=1,\ f'(0)=0,\ f''(t)=-\omega^2\cos\omega t,$$

根据微分性质和线性性质

$$\mathcal{L}[-\omega^2\cos\omega t]=s^2\mathcal{L}[\cos\omega t]-sf(0)-f'(0),$$

$$-\omega^2\mathcal{L}[\cos\omega t]=s^2\mathcal{L}[\cos\omega t]-s,$$

所以 $\mathcal{L}[\cos\omega t]=\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$. 使用同样方法，可得 $\mathcal{L}[\sin\omega t]=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$.

例7.9　求 $f(t)=t^2+\sin\omega t$ 的Laplace变换.

解　根据线性性质与例7.8及例7.4

$$\mathscr{L}[t^2+\sin\omega t]$$

$$=\mathscr{L}[t^2]+\mathscr{L}[\sin\omega t]$$

$$=\frac{2!}{s^3}+\frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

利用 微分性质 也可以求出当m是正整数时，

$$\mathcal{L}\left[t^m\right]=\frac{m!}{s^{m+1}}.$$

参见例7.4

事实上, 设 $f(t)=t^m$，则

$$f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(m-1)}(0)=0.$$

因为 $f^{(m)}(t)=m!$, $\mathcal{L}[1]=\dfrac{1}{s}$, 所以 $m!\mathcal{L}[1]=s^m\mathcal{L}[t^m]$.

于是$\mathcal{L}\left[t^m\right]=\dfrac{m!}{s^{m+1}}$.

(3) 像函数的微分性质　　设 $F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$, 则

$$F'(s)=-\mathscr{L}[tf(t)].$$

一般地，对正整数n, 有

$$F^{(n)}(s)=(-1)^n\mathscr{L}[t^n f(t)].$$

证明　对解析函数

$$F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

求导，右端求导时可在积分号下进行，即得.

例7.10　求 $f(t)=t\sin\omega t$ 的Laplace变换.

解　根据 像函数的微分性质 与例7.8

$$\mathcal{L}[t\sin\omega t]=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{L}[\sin\omega t]$$

$$=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right)=\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}.$$

使用同样方法，可得

$$\mathcal{L}[t\cos\omega t]=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{L}[\cos\omega t]=\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}.$$

(4) 积分性质　　设 $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$，则

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\mathrm{d}t\right] = \frac{1}{s}F(s).$$

证明　设 $\varphi(t) = \int_0^t f(t)\mathrm{d}t$，则 $\varphi'(t) = f(t)$，$\varphi(0) = 0.$

故由微分性质

$$\mathcal{L}[f(t)] = s\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\mathrm{d}t\right] - \varphi(0),$$

于是结论得证. 一般地，对n次积分有 $\mathcal{L}\left[\int_0^t \mathrm{d}t\int_0^t \mathrm{d}t\cdots\int_0^t f(t)\mathrm{d}t\right] = \frac{1}{s^n}F(s).$

(5) 位移性质　　设 $F(s)=\mathscr{L}\,[f(t)]$，则

$$\mathscr{L}\,[e^{at}f(t)]=F(s-a)\quad\left(\mathrm{Re}(s-a)>s_0\right),$$

其中 s_0 是 $f(t)$ 的增长指数.

证明　根据定义，有

$$\mathscr{L}\,[e^{at}f(t)]=\int_0^{+\infty}e^{at}f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-(s-a)t}\mathrm{d}t=F(s-a).$$

例7.11　求 $\mathcal{L}\,[te^{at}\sin at]$ 和 $\mathcal{L}\,[te^{at}\cos at]$.

解　由例7.10

$$\mathcal{L}\,[t\sin at]=\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}.$$

故根据 **位移性质**

$$\mathcal{L}\,[te^{at}\sin at]=\frac{2a(s-a)}{[(s-a)^2+a^2]^2}.$$

使用同样方法，可得

$$\mathcal{L}\,[te^{at}\cos at]=\frac{(s-a)^2-a^2}{[(s-a)^2+a^2]^2}=\frac{s(s-2a)}{[(s-a)^2+a^2]^2}.$$

例7.12　求 $L\left[\int_0^t te^{at}\sin at\mathrm{d}t\right]$.

解　根据例7.11与积分性质

$$L\left[\int_0^t te^{at}\sin at\mathrm{d}t\right]=\frac{2a(s-a)}{s[(s-a)^2+a^2]^2}.$$

使用同样方法，可得

$$L\left[\int_0^t te^{at}\cos at\mathrm{d}t\right]=\frac{s-2a}{[(s-a)^2+a^2]^2}.$$

(6) 像函数的积分性质　　设 $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$, 且 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{f(t)}{t}$ 存在，积分 $\int_s^{+\infty}F(u)\mathrm{d}u$ 收敛，则

$$\int_s^{+\infty}F(u)\mathrm{d}u=\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right].$$

证明　根据解析函数的惟一性定理　u取在正实轴从s到$+\infty$,则

$$\int_s^{+\infty}F(u)\mathrm{d}u=\int_s^{+\infty}\mathrm{d}u\int_0^{+\infty}f(t)e^{-ut}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t\int_s^{+\infty}e^{-ut}\mathrm{d}u=\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}e^{-st}\mathrm{d}t=\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right].$$

推论　如果像函数积分性质的条件满足，且积分 $\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$ 收敛，则

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}F(s)\mathrm{d}s.$$

事实上，对于像函数积分性质

$$\int_s^{+\infty}F(u)\mathrm{d}u=\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right],$$

令 $s\to 0^+$ 即可.

例7.13　求 $f(t)=\dfrac{\sin t}{t}$ 的Laplace变换，并求积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t.$

解　由例7.3　已知$\mathscr{L}\,[\sin t]=\dfrac{1}{s^2+1}$，故根据像函数的积分性质

$$\mathscr{L}\left[\frac{\sin t}{t}\right]=\int_s^{+\infty}\frac{1}{s^2+1}\mathrm{d}s=\frac{\pi}{2}-\arctan s$$

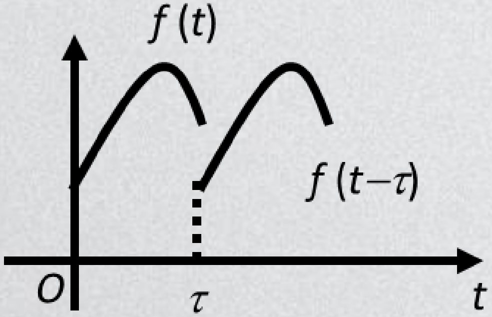
再利用像函数的积分性质的推论

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{1}{s^2+1}\mathrm{d}s=\frac{\pi}{2}.$$

(7) 延迟性质　设 $F(s)=\mathcal{L}\,[f(t)]$, 若当 $t<0$时,

$f(t)=0$, 则对任何非负实数τ, 有

$$\mathcal{L}\,[f(t-\tau)]=e^{-s\tau}F(s).$$



证明　根据定义

$$\mathcal{L}\,[f(t-\tau)]=\int_0^{+\infty} f(t-\tau)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\tau} f(t-\tau)e^{-st}\mathrm{d}t+\int_{\tau}^{+\infty} f(t-\tau)e^{-st}\mathrm{d}t.$$

因为当 $t<0$ 时, $f(t)=0$, 所以在 $[0,\tau]$ 上, 有 $f(t-\tau)=0$,

从而

$$\mathcal{L}\,[f(t-\tau)]=\int_{\tau}^{+\infty} f(t-\tau)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{0}^{+\infty} f(u)e^{-(u+\tau)s}\mathrm{d}u=e^{-\tau s}\int_{0}^{+\infty} f(u)e^{-us}\mathrm{d}u$$

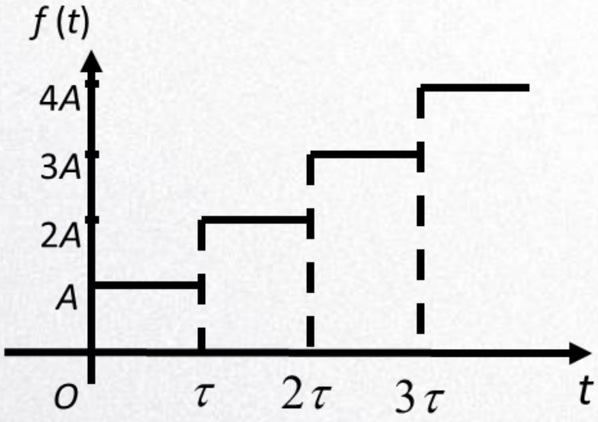
$$=e^{-\tau s}F(s)\ \left(\mathrm{Re}\,s>s_0\right).$$

利用单位阶跃函数 $u(t)$，可以将写成

$$\mathcal{L}\,[f(t-\tau)]=e^{-s\tau}F(s).$$

$$\mathcal{L}\,[f(t-\tau)u(t-\tau)]=e^{-s\tau}F(s).$$

例7.14　求如图所示阶梯函数的Laplace变换.



解法1　利用Heaviside函数

$$u(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

图中的函数 $f(t)$ 可表示为

$$f(t)=A[u(t)+u(t-\tau)+u(t-2\tau)+\cdots]$$

$$=A\sum_{k=0}^{\infty}u(t-k\tau).$$

因为 $L\ [u(t)]=\dfrac{1}{s}$，所以由 延迟性质

$$\mathscr{L}\,[u(t-k\tau)]=\frac{1}{s}e^{-k\tau s}.$$

再注意到 $\left|e^{-s\tau}\right|<1\ \ (\mathrm{Re}\,s>0)$，于是

$$\mathscr{L}\,[f(t)]=\frac{A}{s}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-k\tau s}=\frac{A}{s(1-e^{-s\tau})}$$

$$=\frac{A}{s}\times\frac{1}{(1-e^{-\frac{s\tau}{2}})(1+e^{-\frac{s\tau}{2}})}$$

$$=\frac{A}{2s}\left(1+\mathrm{cth}\frac{s\tau}{2}\right)\ \ (\mathrm{Re}\,s>0).$$

解法2 $f(t)=\dfrac{A}{\tau}t+f(t)-\dfrac{At}{\tau}$，则 $f(t)-\dfrac{At}{\tau}$

是以τ为周期的函数，由 周期函数的Laplace变换公式

$$\mathcal{L}[f(t)]=\frac{A}{\tau}\mathcal{L}[t]+\frac{1}{1-e^{-\tau s}}\int_0^{\tau}\left[f(t)-\frac{At}{\tau}\right]e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{A}{\tau}\times\frac{1}{s^2}+\frac{1}{1-e^{-\tau s}}\int_0^{\tau}\left[A-\frac{A}{\tau}t\right]e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{A}{\tau}\times\frac{1}{s^2}+\frac{A}{1-e^{-\tau s}}\left[\left(-\frac{1}{s}+\frac{t}{\tau s}+\frac{1}{\tau s^2}\right)e^{-st}\Big|_0^{\tau}\right]$$

$$\mathcal{L}\,[f(t)] = \frac{A}{\tau}\times\frac{1}{s^2} + \frac{A}{1-e^{-\tau s}}\left(\frac{1}{\tau s^2}e^{-s\tau} + \frac{1}{s} - \frac{1}{\tau s^2}\right)$$

$$= \frac{A}{s}\times\frac{1}{1-e^{-\tau s}} = \frac{A}{2s}\left(1+\operatorname{cth}\frac{\tau s}{2}\right).$$

(8) 相似性质　　设 $F(s)=\mathcal{L}\,[f(t)]$，则 $\mathcal{L}\,[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)\quad(a>0)$，

其中 $\operatorname{Re}s > as_0$.

证明　根据定义 $\mathcal{L}\,[f(at)] = \int_0^{+\infty} f(at)e^{-st}\mathrm{d}t$，故

$$\mathcal{L}\,[f(at)] = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f(u)e^{-\frac{s}{a}u}\mathrm{d}u = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right).$$

例7.15 求 $\mathcal{L}\,[u(5t)]$ 和 $\mathcal{L}\,[u(5t-2)]$.

解 因为 $\mathcal{L}\,[u(t)]=\dfrac{1}{s}$, 所以

$$\mathcal{L}\,[u(5t)]=\frac{1}{5}\times\frac{1}{\frac{s}{5}}=\frac{1}{s}.$$

实际上, 由 $u(5t)=u(t)$, 可直接得到结论. 又由于 $u(5t-2)=u\left[5\left(t-\dfrac{2}{5}\right)\right]$,

故由延迟性质和相似性质

$$\mathcal{L}\,[u(5t-2)]=e^{-\frac{2}{5}s}\mathcal{L}\,[u(5t)]=\frac{1}{s}e^{-\frac{2}{5}s}.$$

(9) 初值定理和终值定理

初值定理 设 $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$，且 $\lim\limits_{s\to\infty} sF(s)$存在，

则

$$f(0)=\lim_{s\to\infty} sF(s).$$

终值定理 设 $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$，且 $sF(s)$ 的所有奇点都在s平面的左半部，则

$$\lim_{t\to+\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} sF(s).$$

下面介绍Laplace变换的卷积性质—卷积定理. Laplace变换的卷积性质不仅能用来求出某些函数的Laplace逆变换, 而且在线性系统的研究中起着重要作用.

因为在Laplace变换中, 总认为$t<0$时像原函数 $f(t)$ 恒为零. 因此, $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$的卷积为

$$f_1(t)*f_2(t)=\left(f_1*f_2\right)(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

卷积定理　设 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 满足Laplace变换存在的条件，即存在

$M>0$ 和 $s_0>0$，使得

$$\left|f_1(t)\right| \le Me^{s_0 t}, \quad \left|f_2(t)\right| \le Me^{s_0 t}.$$

如果

$$F_1(s)=\mathcal{L}\,[f_1(t)],\ F_2(s)=\mathcal{L}\,[f_2(t)],$$

则

$$\mathcal{L}\left[\left(f_1 * f_2\right)(t)\right]=F_1(s)F_2(s),$$

或

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F_1(s)F_2(s)\right]=\left(f_1 * f_2\right)(t).$$

证明　当 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 分段连续时，其卷积 $\left(f_1 * f_2\right)(t)$

也是分段连续的. 不妨设 $s_0 \geq 1,$ 由于

$$\left|\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) \mathrm{d}\tau\right| \leq \int_0^t \left|f_1(\tau)\right| \left|f_2(t-\tau)\right| \mathrm{d}\tau$$

$$\leq \int_0^t M e^{s_0 \tau} M e^{s_0 (t-\tau)} \mathrm{d}\tau = M^2 t e^{s_0 t} \leq M^2 e^{2 s_0 t},$$

因此，$\left(f_1 * f_2\right)(t)$ 也满足Laplace变换存在的条件.

复变函数：第七章：拉普拉斯变换

$$\mathcal{L}\left[\left(f_1 * f_2\right)(t)\right]=\int_0^{+\infty}\left[\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]e^{-st}\mathrm{d}t,$$

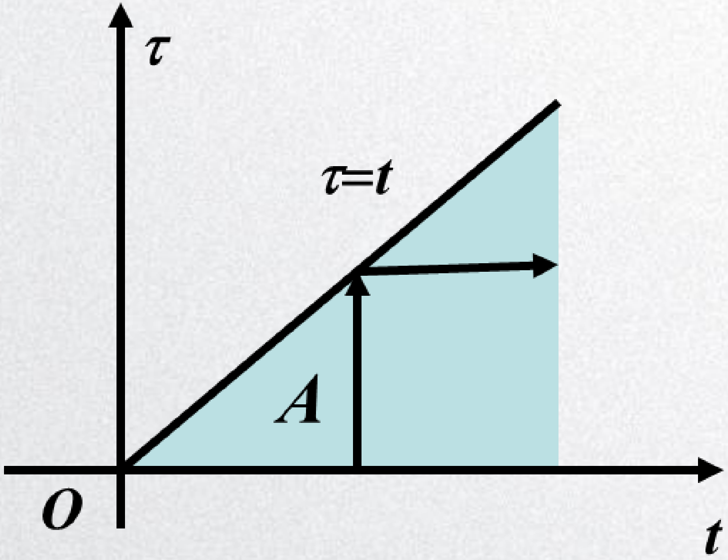
$$=\iint_A f_1(\tau) f_2(t-\tau)e^{-st}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t,$$

其中A是 $tO\tau$ 平面内 t 轴

和第一象限的角平分线

$\tau = t$ 围成的角形区域.

交换积分次序



$$[(f_1 * f_2)(t)] = \iint_A f_1(\tau) f_2(t-\tau) e^{-st} \mathrm{d}\tau \mathrm{d}t$$

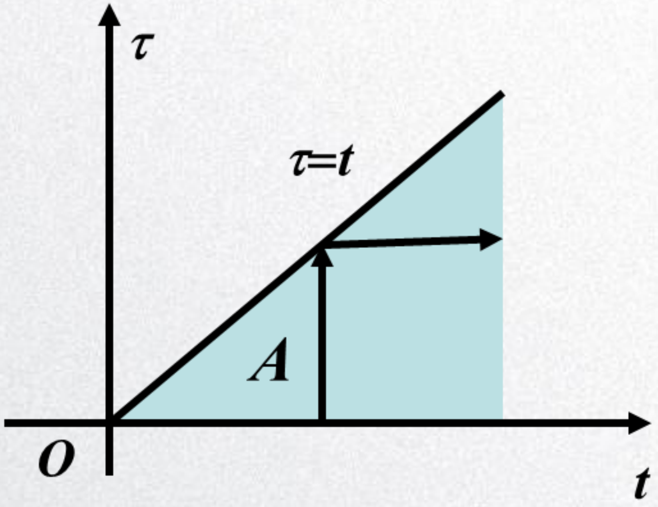
$$= \int_0^{+\infty} \mathrm{d}\tau \int_\tau^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) e^{-st} \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{+\infty} f_1(\tau) \mathrm{d}\tau \int_\tau^{+\infty} f_2(t-\tau) e^{-st} \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{+\infty} f_1(\tau) \mathrm{d}\tau \int_0^{+\infty} f_2(u) e^{-(u+\tau)s} \mathrm{d}u$$

$$= \int_0^{+\infty} f_1(\tau) e^{-s\tau} \mathrm{d}\tau \int_0^{+\infty} f_2(u) e^{-su} \mathrm{d}u$$

$$= L\ [f_1(t)] L\ [f_2(t)] = F_1(s) F_2(s).$$



例7.16 设 $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$，利用卷积定理证明Laplace变换的积分性质

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right]=\frac{1}{s}F(s).$$

证明 设 $f_1(t)=f(t)$，$f_2(t)=1$，则

$$\mathcal{L}\left[f_1(t)\right]=F(s),\ \mathcal{L}\left[f_2(t)\right]=\frac{1}{s}.$$

于是

$$\mathcal{L}\left[\left(f_1*f_2\right)(t)\right]=\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right]=\frac{1}{s}F(s).$$

应用卷积定理可求某些Laplace逆变换.

例7.17　求 $\mathscr{L}\left[\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right]$，并证明

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}(s-1)}\right]=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{t}\int_{0}^{\sqrt{t}}e^{-u^{2}}\mathrm{d}u.$$

解　因为

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_{0}^{+\infty}x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}\mathrm{d}x=2\int_{0}^{+\infty}e^{-t^{2}}\mathrm{d}t=\sqrt{\pi},$$

故根据例7.4

$$\mathscr{L}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right]=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}.$$

根据 位移性质 $\mathscr{L}\,[e^t]=\dfrac{1}{s-1}$， 则由卷积定理

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}(s-1)}\right]=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}*e^t=\int_0^t e^{t-\tau}\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^t\int_0^t e^{-\tau}\frac{1}{\sqrt{\tau}}\mathrm{d}\tau=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^t\int_0^{\sqrt{t}}e^{-u^2}\mathrm{d}u.$$

例7.18　若 $F(s)=\dfrac{1}{s^2(1+s^2)}$，求 $f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$.

解　令 $F_1(s)=\dfrac{1}{s^2}$　$F_2(s)=\dfrac{1}{1+s^2}$，则

$$f_1(t)=\mathcal{L}^{-1}[F_1(s)]=t,\quad f_2(t)=\mathcal{L}^{-1}[F_2(s)]=\sin t.$$

故根据卷积定理及 $t*\sin t=\int_0^t x\sin(t-x)\mathrm{d}x=t-\sin t$，有

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\mathcal{L}^{-1}[F_1(s)F_2(s)]=\left(f_1*f_2\right)(t)$$

$$=t*\sin t=t-\sin t.$$

例7.19　求 $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s^2}{(s^2+1)^2}\right]$.

解　因为 $\mathcal{L}[\cos t]=\dfrac{s}{s^2+1}$，故由**卷积定理**

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2}{(s^2+1)^2}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\times\frac{s}{s^2+1}\right]=\cos t*\cos t$$

$$=\int_0^t\cos\tau\cos(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2}\int_0^t[\cos t+\cos(2\tau-t)]\mathrm{d}\tau\quad=\frac{1}{2}(t\cos t+\sin t).$$

复变函数：第七章：拉普拉斯变换

例7.20 设 $\mathcal{L}\left[f(t)\right]=\dfrac{1}{(s^2+4s+13)^2}$，求 $f(t)$.

解 由 位移性质

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s^2+4s+13}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{(s+2)^2+3^2}\right]=e^{-2t}\sin 3t.$$

因此，根据 卷积定理

$$f(t)=\frac{1}{9}(e^{-2t}\sin 3t)*(e^{-2t}\sin 3t)=\frac{1}{54}e^{-2t}(\sin 3t-3t\cos 3t).$$

7.3 Laplace 逆变换

由例7.17 —例7.20可见，应用Laplace变换的性质，特别是卷积定理，能够解决某些Laplace逆变换问题．但是当 $F(s)$比较复杂时，仅用前面的方法是不够的. 因此, 本节给出Laplace逆变换积分表达式，应用复变函数论中的留数理论作为工具，给出一种较一般的方法.

复变函数：第七章：拉普拉斯变换

已知 $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$ 在收敛域内解析，但并不是所有解析函数都是某一函数的Laplace变换像函数. 例如，由初值定理可以看出, 多项式不存在Laplace逆变换. 由 初值定理 $\lim\limits_{\mathrm{Re}\,s\to+\infty} F(s)=0$, 这实际上是 $F(s)$ 存在Laplace逆变换的必要条件.

另外，函数 $f(t)$ 的Laplace变换实际上就是 $f(t)u(t)e^{-\beta t}$ 的Fourier变换. 因此, 当 $f(t)u(t)e^{-\beta t}$ 满足Fourier积分定理的条件时, 根据Fourier积分

复变函数：第七章：拉普拉斯变换

公式，$f(t)$ 在连续点处

$$f(t)u(t)e^{-\beta t}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)u(\tau)e^{-\beta\tau}e^{-i\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right]e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega$$

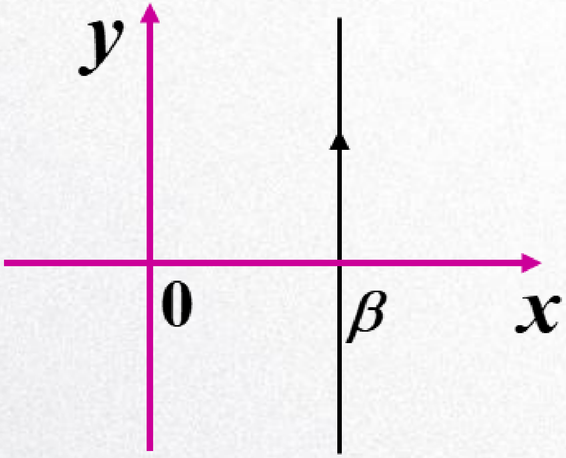
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega\int_{0}^{+\infty}f(\tau)e^{-(\beta+i\omega)\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\beta+i\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega\quad(t>0),$$

在等式两端同乘以 $e^{\beta t}$，故当t>0时， $f(t)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}F(\beta+i\omega)e^{(\beta+i\omega)t}\mathrm{d}\omega.$

令 $\beta + i\omega = s$, 则

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\beta - i\infty}^{\beta + i\infty} F(s)e^{st}\mathrm{d}s \quad (t > 0),$$



其中 $\beta > s_0$, s_0 是 $f(t)$ 的增长指数. 积分路径是

在右半平面 $\mathrm{Re}\, s > s_0$ 上的任意一条直线 $\mathrm{Re}\, s = \beta$.

这就是Laplace逆变换的 一般公式, 称为Laplace 变换

的反演积分. 这是复变函数的积分, 在一定条件下, 可利用留数来计算.

利用留数求Laplace逆变换的公式

定理7.3　设 $s_1, s_2, \cdots, s_n$ 是 $F(s)$ 的所有孤立奇点(有限个)，除这些点外，$F(s)$ 处处解析，且存在 $R_0 > 0$，当 $|s| \geq R_0$ 时，$|F(s)| \leq M(|s|)$，其中 $M(r)$ 是 r 的实函数，且 $\lim\limits_{r \to +\infty} M(r) = 0$．选取 β，使所有孤立奇点都在 $\mathrm{Re}\, s < \beta$ 内，则当 $t > 0$ 时，

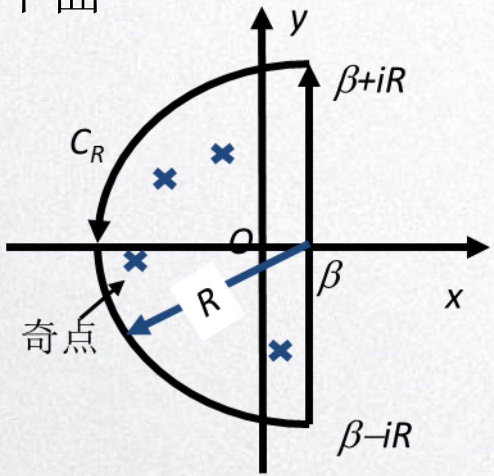
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} F(s)e^{st}\,\mathrm{d}s = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[F(s)e^{st}, s_k]$$

证明　取 $R>0$ 充分大,使得 $s_1, s_2, \cdots, s_n$ 都在圆弧

C_R 和直线 $\mathrm{Re}\, s=\beta$ 所围成的区域内.　因为e^{st} 是全平面

上的解析函数，因此，$s_1, s_2, \cdots, s_n$ 是 $F(s)e^{st}$ 的

孤立奇点, 除这些奇点之外， $F(s)e^{st}$ 处处解析.



于是，根据 留数基本定理

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\beta-iR}^{\beta+iR} F(s)e^{st}ds+\int_{C_R} F(s)e^{st}\mathrm{d}s\right)=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[F(s)e^{st}, s_k].$$

利用 **Jordan引理**

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} F(s)e^{st}\mathrm{d}s = 0 \quad (t>0).$$

令 $R\to+\infty$，得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} F(s)e^{st}\mathrm{d}s = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[F(s)e^{st}, s_k].$$

特别当 $F(s)$ 是有理函数，且为分母次数高于分子次数的有理真分式，

则Laplace逆变换存在，

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right] = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[F(s)e^{st}, s_k].$$

例7.21　求 $F(s)=\dfrac{s}{s^2+1}$ 的Laplace逆变换.

解　$s=\pm i$ 是 $\dfrac{s}{s^2+1}e^{st}$ 的1级极点，　由计算 留数的法则，

$$\operatorname{Res}\left[\frac{s}{s^2+1}e^{st},\quad \pm i\right]=\left.\frac{se^{st}}{2s}\right|_{s=\pm i}=\frac{1}{2}e^{\pm it},$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\operatorname{Res}\left[\frac{s}{s^2+1}e^{st},\quad i\right]+\operatorname{Res}\left[\frac{s}{s^2+1}e^{st},\quad -i\right]$$

$$=\frac{1}{2}(e^{it}+e^{-it})=\cos t.$$

例7.22 求 $F(s)=\dfrac{1}{s(s-1)^2}$ 的Laplace逆变换.

解 $s_1=0$ 和 $s_2=1$ 分别是 $\dfrac{1}{s(s-1)^2}e^{st}$ 的1级和2级极点.

故由计算留数的法则

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{s(s-1)^2}e^{st},\ 0\right]=\lim_{s\to 0}\frac{e^{st}}{(s-1)^2}=1,$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{s(s-1)^2}e^{st},\ 1\right]=\lim_{s\to 1}\left[\frac{e^{st}}{s}\right]'=e^t(t-1),$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s-1)^2}\right]=1+e^t(t-1)\quad(t>0).$$

例7.23　求 $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{(s+1)^3(s-1)^2}\right]$.

解　$s_1=-1$ 和 $s_2=1$ 分别是 $\dfrac{s}{(s+1)^3(s-1)^2}e^{st}$ 的3级和2级极点.

故由计算留数的法则

$$\mathrm{Res}\left[\frac{s}{(s+1)^3(s-1)^2}e^{st},\ -1\right]=\frac{1}{2\,!}\lim_{s\to-1}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\left[\frac{s}{(s-1)^2}e^{st}\right]=\frac{e^{-t}}{16}(1-2t^2),$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{s}{(s+1)^3(s-1)^2}e^{st},\ 1\right]=\lim_{s\to 1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{s}{(s+1)^3}e^{st}\right]$$

$$=\frac{e^t}{16}(2t-1).$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s+1)^3(s-1)^2}\right]=\frac{1}{16}\left[e^{-t}(1-2t^2)+e^t(2t-1)\right].$$

当 $F(s)$ 是有理函数时, 可把它化为部分分式

再求逆变换，一般来说这样更为方便.

例7.24 求 $F(s)=\dfrac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3}$ 的Laplace逆变换.

解法1 $s_1=-1$ 和 $s_2=2$ 分别是 $F(s)e^{st}$ 的1级和3级极点，

故由计算留数的法则

$$\mathrm{Res}\left[F(s)e^{st},\ -1\right]=\lim_{s\to-1}\frac{5s^2-15s-11}{(s-2)^3}e^{st}=-\frac{1}{3}e^{-t},$$

$$\mathrm{Res}\left[F(s)e^{st},\ 2\right]=\frac{1}{2!}\lim_{s\to2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\left[\frac{5s^2-15s-11}{s+1}e^{st}\right]$$

$$=\frac{1}{2!}\lim_{s\to 2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\left[\left(5s-20+\frac{9}{s+1}\right)e^{st}\right]$$

$$=\frac{1}{2!}\lim_{s\to 2}\left\{\frac{18}{(s+1)^3}e^{st}+2t\left[5-\frac{9}{(s+1)^2}\right]e^{st}\right.$$

$$\left.+\left(5s-20+\frac{9}{s+1}\right)t^2e^{st}\right\}\quad=\frac{1}{3}e^{2t}+4te^{2t}-\frac{7}{2}t^2e^{2t}.$$

$$L^{-1}\left[\frac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3}\right]=-\frac{1}{3}e^{-t}+\left(\frac{1}{3}+4t-\frac{7}{2}t^2\right)e^{2t}.$$

解法2 $F(s)$ 可分解为形如

$$\frac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{(s-2)^3}+\frac{C}{(s-2)^2}+\frac{D}{s-2},$$

可以求得

$$A=-\frac{1}{3},\ \ B=-7,\ \ C=4,\ \ D=\frac{1}{3}.$$

因为$\mathcal{L}\left[e^{at}t^n\right]=\dfrac{n\,!}{(s-a)^{n+1}}$，所以

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3}\right]=-\frac{1}{3}e^{-t}-\frac{7}{2}t^2e^{2t}+4te^{2t}+\frac{1}{3}e^{2t}.$$

复变函数：第七章：拉普拉斯变换

到目前为止, 已介绍了多种求Laplace逆变换的方法. 例如: 利用卷积定理; 利用留数定理; 利用部分分式等. 在使用时, 应该根据具体情形采用简便的方法. 有时也可以利用Laplace变换的一些基本性质. 在以上方法中，除利用留数定理之外,都需要知道一些最基本的Laplace 变换的像函数和像原函数.

例7.25　求 $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}\right]\ (a>0).$

解　因为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right)=\frac{1}{s^2+a^2}-\frac{2s^2}{(s^2+a^2)^2}=\frac{a^2-s^2}{(s^2+a^2)^2},$$

$$\mathscr{L}[\cos at]=\frac{s}{s^2+a^2},\quad \mathscr{L}[tf(t)]=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathscr{L}[f(t)],$$

所以

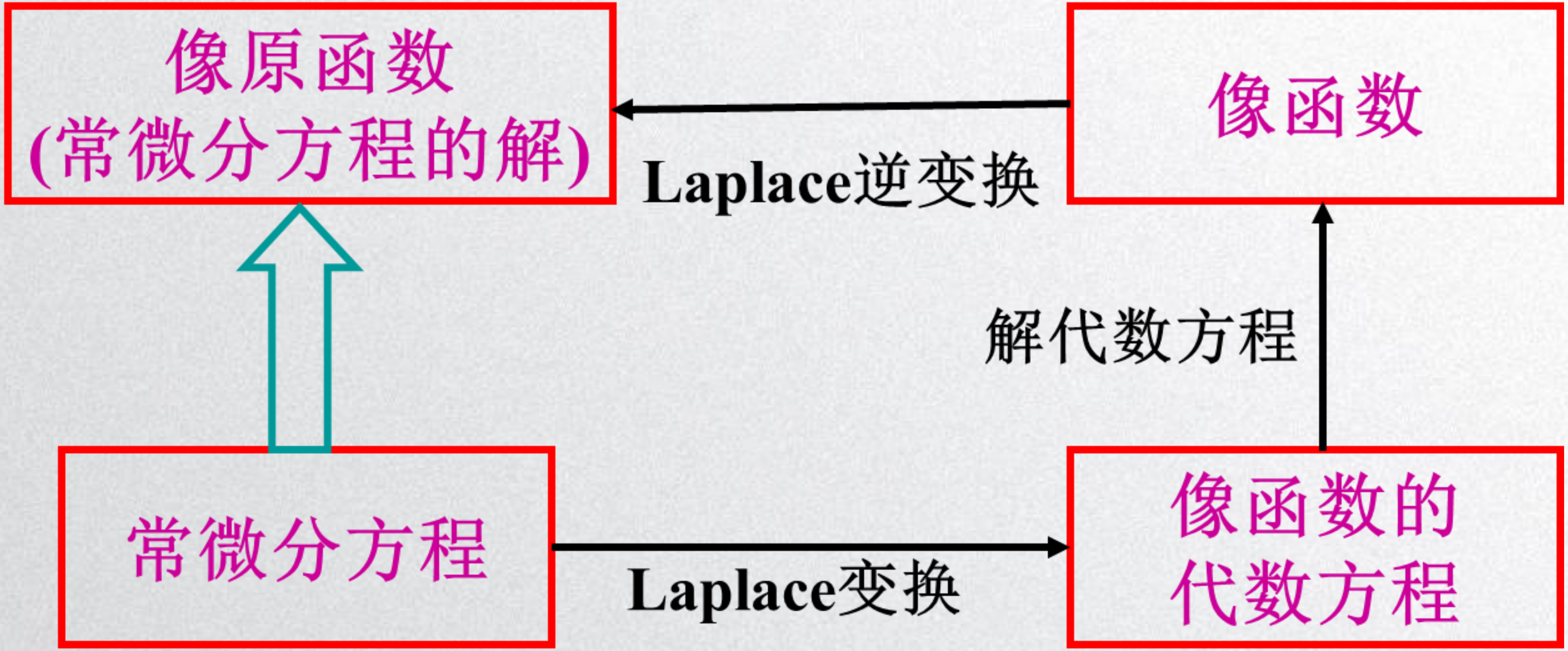
$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}\right]=t\cos at.$$

7.4 Laplace变换的应用

Laplace变换在线性系统的分析和研究中起着重要作用. 线性系统在许多场合，可以用线性常微分方程来描述. 这类系统在电路原理和自动控制理论中，都占有重要地位.

下面首先介绍利用Laplace变换求线性常微分方程和方程组特解的方法.

复变函数：第七章：拉普拉斯变换



基本思路

对所给方程的两端进行Laplace变换, 根据Laplace变换的性质(如微分性质), 得出有关像函数的代数方程，从而求出未知函数的像函数. 最后通过求其逆变换，得出所给方程的解.

例7.26　求常系数线性微分方程的初值问题

$$\begin{cases} x''(t)-2x'(t)+2x(t)=2e^{t}\cos t \\ x(0)=x'(0)=0 \end{cases}$$

的解.

解　设 $X(s)=\mathcal{L}\,[x(t)]$ 是初值问题解 $x(t)$ 的Laplace变换的像.

对方程两边进行Laplace变换，

根据微分性质和初值条件，

$$s^2X(s)-2sX(s)+2X(s)=\mathcal{L}\,[2e^t\cos t].$$

利用 $\mathcal{L}\,[\cos t]=\dfrac{s}{s^2+1}$ 及位移性质

$$\mathcal{L}\,[2e^t\cos t]=\frac{2(s-1)}{(s-1)^2+1},\quad X(s)=\frac{2(s-1)}{[(s-1)^2+1]^2}=-\left[\frac{1}{(s-1)^2+1}\right]'.$$

因为 $\mathcal{L}\,[\sin t]=\dfrac{1}{s^2+1}$，所以 $\mathcal{L}\,[e^t\sin t]=\dfrac{1}{(s-1)^2+1}$.

由像函数的微分性质 $\mathcal{L}\,[te^t\sin t]=-\left[\dfrac{1}{(s-1)^2+1}\right]'$,

于是

$$x(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2(s-1)}{[(s-1)^2+1]^2}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\left(-\frac{1}{(s-1)^2+1}\right)'\right]=te^t\sin t.$$

例7.27　求积分方程

$$y(t) = at + \int_0^t y(\tau)\sin(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

的解.

解　设 $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$, 因为

$$\int_0^t y(\tau)\sin(t-\tau)\mathrm{d}\tau = y(t) * \sin t,$$

对方程两边进行Laplace变换，根据 卷积定理 以及 $\mathcal{L}[\sin t] = \dfrac{1}{s^2+1}$, 有

复变函数：第七章：拉普拉斯变换

$$Y(s)=\frac{a}{s^2}+\frac{Y(s)}{s^2+1}.$$

解出 $Y(s)$，得

$$Y(s)=\frac{a(s^2+1)}{s^4}=\frac{a}{s^2}+\frac{a}{s^4}.$$

再求逆变换，从而

$$y(t)=a\left(t+\frac{1}{6}t^3\right).$$

例7.28　求一阶微分方程组

$$\begin{cases} x' + 2x + 2y = 10e^{2t} \\ -2x + y' + y = 7e^{2t} \end{cases}$$

满足初值条件 $x(0)=1,\ y(0)=3$ 的解.

解　设 $x(t),\ y(t)$ 是所要求的解，记

$$X(s) = \mathcal{L}\,[x(t)],\ Y(s) = \mathcal{L}\,[y(t)].$$

对方程组两边进行Laplace变换，由微分性质和初值条件

$$\begin{cases} sX(s)-1+2X(s)+2Y(s)=\dfrac{10}{s-2}, \\ -2X(s)+sY(s)-3+Y(s)=\dfrac{7}{s-2}. \end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases} (s+2)X(s)+2Y(s)=\dfrac{s+8}{s-2}, \\ -2X(s)+(s+1)Y(s)=\dfrac{3s+1}{s-2}. \end{cases}$$

解线性方程组，得 $X(s)=\dfrac{1}{s-2}$， $Y(s)=\dfrac{3}{s-2}$.

求Laplace逆变换， $x(t)=e^{2t}$， $y(t)=3e^{2t}$.

例7.29　求二阶微分方程组

$$\begin{cases} y'' - x'' + x' - y = e^t - 2 \\ 2y'' - x'' - 2y' + x = -t \end{cases}$$

满足初值条件 $\begin{cases} y(0) = y'(0) = 0 \\ x(0) = x'(0) = 0 \end{cases}$ 的解.

解　设 $x(t)$, $y(t)$ 是所要求的解，记

$$X(s) = \mathcal{L}\,[x(t)],\ Y(s) = \mathcal{L}\,[y(t)].$$

对方程组两边求Laplace变换, 并考虑初值条件，则得

$$\begin{cases} s^2Y(s)-s^2X(s)+sX(s)-Y(s)=\dfrac{1}{s-1}-\dfrac{2}{s}, \\ 2s^2Y(s)-s^2X(s)-2sY(s)+X(s)=-\dfrac{1}{s^2}. \end{cases}$$

整理化简后为

$$\begin{cases} (s+1)Y(s)-sX(s)=\dfrac{-s+2}{s(s-1)^2}, \\ 2sY(s)-(s+1)X(s)=-\dfrac{1}{s^2(s-1)}. \end{cases}$$

解这个代数方程组，即得

$$X(s)=\frac{2s-1}{s^2(s-1)^2},\qquad Y(s)=\frac{1}{s(s-1)^2}.$$

根据例7.22, $$y(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{s(s-1)^2}\right]=1+te^t-e^t,$$

$$X(s)=\frac{2s-1}{s^2(s-1)^2}=\frac{1}{s(s-1)^2}+\frac{1}{s^2(s-1)}$$

$$=Y(s)-\frac{1}{s}+\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s^2},$$

故 $x(t)=y(t)-1+e^t-t=te^t-t$, 于是方程的解为

$$x(t)=te^t-t,\quad y(t)=1+te^t-e^t.$$

从以上例子可以看出，利用Laplace变换求解常系数微分方程和方程组时，初值条件已经用到,所得的解就是满足初值条件的特解，避免了先求通解，再求特解的过程. 对有些变系数方程，也可以利用Laplace变换求解.

例7.30　求微分方程 $ty''+y'+4ty=0$ 满足初值条件 $y(0)=3,\quad y'(0)=0$ 的解.

解　设 $Y(s)=\mathscr{L}\,[y(t)]$. 注意到

$$\mathcal{L}\,[ty''(t)] = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{L}\,[y''],$$

$$\mathcal{L}\,[ty(t)] = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{L}\,[y(t)] = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}Y(s),$$

对方程两边进行Laplace变换得

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right] + sY(s) - y(0) - 4\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}Y(s) = 0,$$

把 $y(0) = 3,\quad y'(0) = 0$ 代入到上式，整理得

$$(s^2 + 4)Y'(s) + sY(s) = 0,$$

复变函数：第七章：拉普拉斯变换

这是关于Y的齐次线性方程(也是变量可分离的方程)，于是其通解为

$$Y(s)=Ce^{-\int\frac{s}{s^2+4}ds}=\frac{C}{\sqrt{s^2+4}},$$

求Laplace逆变换, 可得

$$y(t)=CJ_0(2t),$$

其中 $J_0(t)$ 是零阶第一类Bessel函数, 且 $J_0(0)=1.$

于是, 由初值条件 $y(0)=3$ 得 $C=3,$ 即

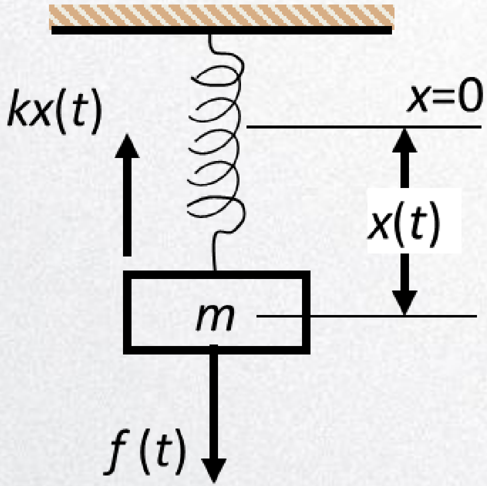
$$y(t)=3J_0(2t).$$

例7.31 质量为m的物体挂在弹性系数为k的弹簧一端，

外力为$f(t)$，物体自平衡位置x=0处开始运动，求运动方程.

解　根据Newton定律，

$$mx''(t)+kx(t)=f(t),\ \ x(0)=x'(0)=0.$$



设 $X(s)=\mathscr{L}\ [x(t)],\ F(s)=\mathscr{L}\ [f(t)].$ 对方程两边

进行Laplace变换得　$ms^2X(s)+kX(s)=F(s).$

记 $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$， 于是

$$X(s) = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{s^2 + \omega_0^2} \cdot F(s).$$

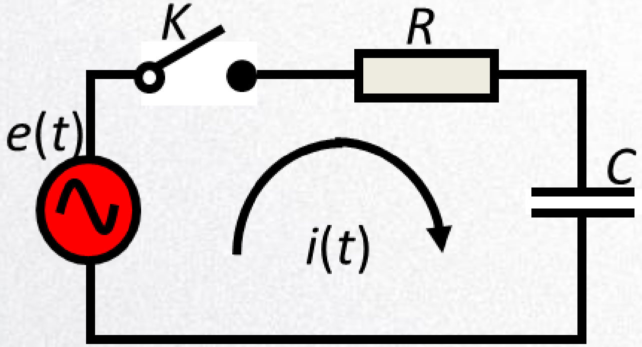
因为

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + \omega_0^2}\right] = \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0},$$

所以根据 卷积定理

$$x(t) = \frac{1}{m} \cdot \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0} * f(t) = \frac{1}{m\omega_0} \int_0^t f(\tau) \sin \omega_0 (t - \tau) \mathrm{d}\tau.$$

例7.32 在图示电路中,求开关闭合后, 电容器两端的电压 $u_C(t)$.



解　因为 $u_R + u_C = e(t)$, 其中

$$u_R = Ri(t),\ i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t},$$

$i(t)$表示回路中电流, 所以 $RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = e(t)$. 设

$$\mathcal{L}\ [u_C(t)] = U_C(s),\ \mathcal{L}\ [e(t)] = E(s),$$

复变函数：第七章：拉普拉斯变换

则对方程两边进行Laplace变换得

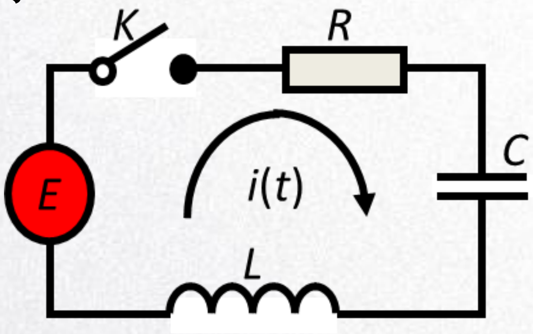
$$RCsU_C(s)+U_C(s)=E(s),$$

于是 $U_C(s)=\dfrac{E(s)}{1+RCs}$. 设 $e(t)=a\,\mathrm{e}^{i\omega t}$, 其中$a$是常数,

则 $E(s)=\dfrac{a}{s-i\omega}$, $U_C(s)=\dfrac{a}{(1+RCs)(s-i\omega)}$.

求Laplace逆变换, 可得 $$u_C(t)=\frac{a}{1+iRC\omega}\left(\mathrm{e}^{i\omega t}-\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}\right).$$

例7.33 在图示的*RLC*电路中串接直流电源*E*, 求回路中电流*i*(*t*).



解 因为 $u_R+u_C+u_L=E$,

其中 $u_R=Ri(t)$, $i(t)=C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$, 故 $u_C=\dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i(t)\mathrm{d}t$,

$u_L=L\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t)$. 所以得到微分积分方程

$$\frac{1}{C}\int_0^t i(t)\mathrm{d}t+Ri(t)+L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t)=E,\ \ i(0)=i'(0)=0.$$

设 $I(s)=\mathcal{L}[i(t)]$, 对方程两边进行Laplace变换,

$$\frac{1}{Cs}I(s)+RI(s)+LsI(s)=\frac{E}{s}.$$

$$I(s)=\frac{E}{L\left(s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}\right)}=\frac{E}{L(s-r_1)(s-r_2)},$$

其中 r_1, r_2是方程$s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}=0$的根,

$$r_1=-\frac{R}{2L}+\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}},\quad r_2=-\frac{R}{2L}-\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}.$$

记 $\alpha=\dfrac{R}{2L},\ \beta=\sqrt{\alpha^2-\dfrac{1}{LC}},$ 则

$$r_1=-\alpha+\beta,\ \ r_2=-\alpha-\beta.$$

求Laplace逆变换, 可得

$$i(t)=\frac{E}{L}\left[\frac{e^{r_1t}}{r_1-r_2}+\frac{e^{r_2t}}{r_2-r_1}\right]=\frac{E}{L}\cdot\frac{e^{r_1t}-e^{r_2t}}{r_1-r_2}$$

$$=\frac{E\,e^{-\alpha t}}{L}\cdot\frac{e^{\beta t}-e^{-\beta t}}{2\beta}=\frac{E}{\beta L}e^{-\alpha t}\sinh\beta t.$$

例7.34 考虑单输入单输出的线性定常系统

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y$$

$$= b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \cdots + b_1 u' + b_0 u,$$

其中 $n \geq m$. $u(t)$, $y(t)$ 分别是系统的输入函数(激励)和输出函数(响应).

当初始条件为零时, 对系统进行Laplace变换. 令

$$Y(s) = \mathcal{L}[y(t)],\ U(s) = \mathcal{L}[u(t)],$$

则有

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0) Y(s)$$

$$= (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0) U(s),$$

从而

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}.$$

称 $G(s)$为线性定常系统的传递函数.

传递函数是系统数学模型的另一种表达形式,通过系统输入和输出之间的关系来描述系统本身

的特性，它只与系统的结构和参数有关，与输入函数的变化形式无关.

设 $g(t)=L^{-1}[G(s)]$，因为 $Y(s)=G(s)U(s)$，所以由 卷积定理

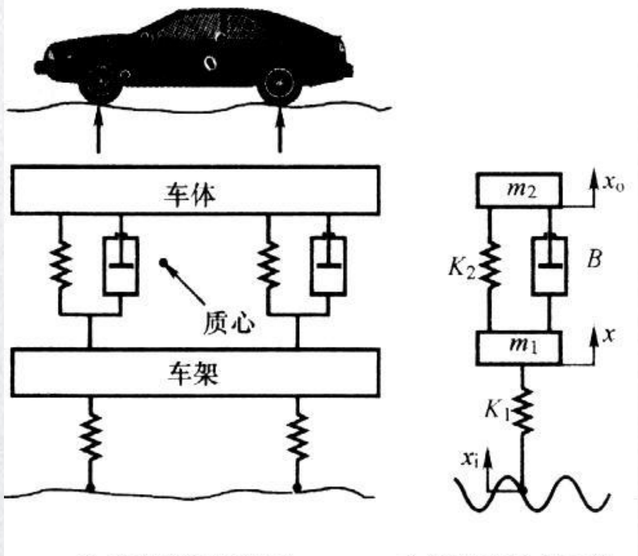
$$y(t)=g(t)*u(t)=\int_0^t g(\tau)u(t-\tau)\mathrm{d}\tau,$$

即系统的响应等于其激励与 $g(t)=L^{-1}[G(s)]$ 的卷积.

可以根据传递函数的极点可以判断系统的稳定性.

复变函数：第七章：拉普拉斯变换

下面我们给出一个具体的汽车悬挂系统的例子． 图a)所示为汽车悬挂系统原理图. 汽车在道路上行驶时, 轮胎的垂直位移是一个运动激励，作用在汽车的悬挂系统上.该系统的运动, 由质心的平移运动和围绕质心的旋转运动组成.



a）悬挂系统原理图　　b）简化的悬挂系统

建立车体在垂直方向上运动的简化数学模型, 如图b).

复变函数：第七章：拉普拉斯变换

设汽车轮胎的垂直运动 x_i 为系统的输入量, 车体的垂直运动 x_o 为系统的输出量，则根据Newton定律，得到系统运动方程为

$$m_1 x'' = B(x_o' - x') + K_2(x_o - x) + K_1(x_i - x),$$

$$m_2 x_o'' = -B(x_o' - x') - K_2(x_o - x).$$

因此, 有

$$m_1 x'' + Bx' + (K_1 + K_2)x = Bx_o' + K_2 x_o + K_1 x_i,$$

$$m_2 x_o'' + Bx_o' + K_2 x_o = Bx' + K_2 x.$$

假设初始条件为零, 对上面两式进行Laplace变换,

得到

$$[m_1 s^2 + Bs + (K_1 + K_2)]X(s)$$

$$= (Bs + K_2)X_o(s) + K_1 X_i(s),$$

$$[m_2 s^2 + Bs + K_2]X_o(s) = (Bs + K_2)X(s),$$

消去中间变量$X(s)$, 整理后即得简化的汽车悬挂系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)},$$

其中

$$X_o(s) = K_1(Bs + K_2),$$

$$\begin{aligned} X_i(s) = m_1 m_2 s^4 + (m_1 + m_2)Bs^3 \\ +[K_1 m_2 + (m_1 + m_2)K_2]s^2 \\ + K_1 Bs + K_1 K_2. \end{aligned}$$

给定传递函数中的参数值后,可以求出传递函数的极点，并根据极点的位置，就可以判断该汽车悬挂系统的稳定性.

例7.35 考虑由状态方程

$$\frac{dx}{dt}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

和输出方程 $y(t) = Cx(t) + Du(t)$ 描述的多输入多输出系统，其中$x(t)$是状态向量，$u(t)$是输入向量，$y(t)$是输出向量．设初始状态为零，对状态方程和输出方程取Laplace变换，得

$$sX(s) = AX(s) + BU(s),$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s).$$

于是可解出

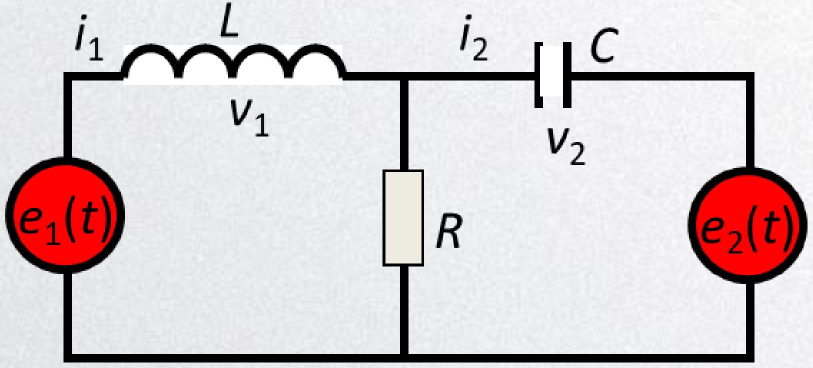
$$X(s)=(sI-A)^{-1}BU(s),$$

$$Y(s)=[C(sI-A)^{-1}B+D]U(s).$$

称 $H(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$为多输入多输出系统的传递矩阵.

下面给出一个例子. 图示的RLC

网络系统, 其状态方程为



$$\begin{bmatrix} \dfrac{di_1}{dt} \\ \dfrac{dv_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L} & -\dfrac{1}{L} \\ 0 & -\dfrac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix},$$

输出方程为

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix},$$

其中 $e_1(t)$和 $e_2(t)$ 是加在网络两端的电压．如果

$$L = \frac{1}{2},\ \ R = \frac{1}{3},\ \ C = 1,$$

传递函数矩阵为

$$H(z)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s & 2\\ -1 & s+3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2 & -2\\ 0 & -3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{s^2+3s+2}\begin{bmatrix}2s+6 & -2s\\ 2s & 7s+6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}.$$

复变函数：第七章：拉普拉斯变换

本章主要内容

Laplace变换

基本性质

- 线性性质
- 微分性质
- 像函数微分
- 积分性质
- 像函数积分
- 位移性质
- 延迟性质
- 相似性质
- 卷积定理
- 初值定理
- 终值定理

逆变换

- 留数公式
- 分部分式
- 变换性质
- 卷积定理

- 解常微分方程
- 解常微分方程组
- 解积分方程

复变函数：第七章：拉普拉斯变换

本章的重点

1. Laplace变换的定义及其性质

2. Laplace逆变换

3. Laplace变换在解微分方程中的应用

THANKS

Q & A ?