工程数学

25-26年度第二学期

网络授课

课程号：00330760 工能必修+航材生限选+双培

2026.04

数理方程：第一章：数学物理中的偏微分方程

一、数学物理方程(泛定方程):物理规律的数学表示

数学物理方程：从物理问题中导出的函数方程，特别是偏微分方程和积分方程。

物理现象 $\xrightarrow{\text{数学语言描述}}$ 物理量u 在空间和时间中的变化规律，即物理量u在各个地点和各个时刻所取的值之间的联系。

泛定方程反映的是同一类物理现象的共性，和具体条件无关。

例：牛顿第二定律反映的是力学现象的普遍规律，跟具体条件无关。

重点讨论：二阶线性偏微分方程。

三类典型的数学物理方程

三类典型的数学物理方程

双曲型方程

波动方程为代表

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t)$$

抛物型方程

扩散方程为代表

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\Delta u=F(x,y,z,t)$$

椭圆型方程

泊松方程为代表

$$-a^2\Delta u=F(x,y,z)$$

$F=0$

退化为拉普拉斯方程

$$\Delta u=0$$

数理方程：第一章：数学物理中的偏微分方程

二、定解条件

1 边界问题---边界条件

体现边界状态的数学方程称为边界条件

2 历史问题-----初始条件

体现历史状态的数学方程称为初始条件。例：一个物体做竖直上抛，一个物体斜抛。不同的初始条件 → 不同的运动状态，但都服从牛顿第二定律。

三、定解问题

在给定的边界条件和初始条件下，根据已知的物理规律，在给定的区域里解出某个物理量u，即求$u(x,y,z,t)$。

定解条件：边界条件和初始条件的总体。它反映了问题的特殊性，即个性。

泛定方程：不带有边界和初始条件的方程称为泛定方程。它反映了问题的共性。

数理方程：第一章：数学物理中的偏微分方程

具体问题求解的一般过程：

1、根据系统的内在规律列出泛定方程——客观规律.

2、根据已知系统的边界状况和初始状况列出边界条件和初始条件——求解所必须的已知条件.

3、求解方法 —— 行波法、分离变量法、积分变换法、格林函数法和变分法

1.1 数学模型（泛定方程）的建立

建模步骤：

（1）明确要研究的物理量是什么？

从所研究的系统中划出任一微元，分析邻近部分与它的相互作用。

（2）研究物理量遵循哪些物理规律？

（3）按物理定律写出数理方程（泛定方程）。

数理方程：第一章：数学物理中的偏微分方程

(一）均匀弦横振动方程

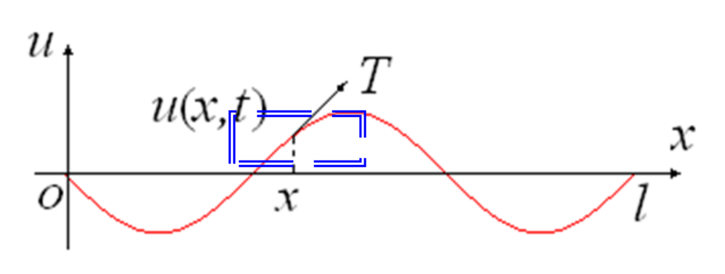
现象描述（如图）：沿x轴绷紧的均匀柔软的细弦，在平衡位置(x轴) 附近产生振幅极小的横向振动

目的：建立与细弦上各点的振动规律相应的方程

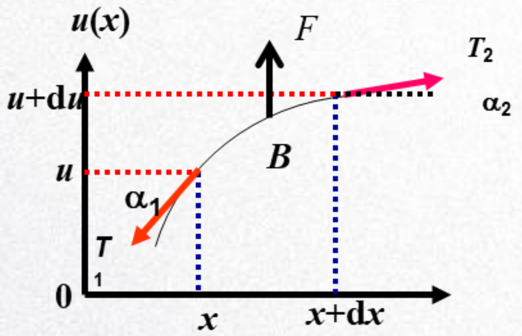
设定：(1)弦不振动时静止于x轴；

(2)用$u(x,t)$表示t时刻弦上任一点x在垂直于x轴方向上的横向位移（偏离）情况

弦的横振动



研究对象:



选取不包括端点的一微元$[x, x+\mathrm{d}x]$弧B 段作为研究对象.

假设与近似:

(1) 弦是柔软的（不抵抗弯曲），张力沿弦的切线方向

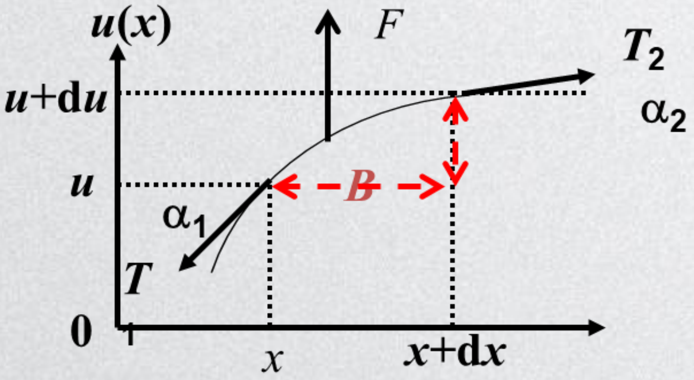
(2) 振幅极小， 张力与水平方向的夹角α_1和α_2 很小，仅考虑α_1和α_2的一阶小量，略去二阶小量

(3) 弦的重量与张力相比很小，可以忽略

ρ: 质量线密度

(4) 设单位长度上弦受力$F(x,t)$，线力密度 $f(x,t) = F(x,t)/\rho$ 为：

数理方程：第一章：数学物理中的偏微分方程



B段弦的原长近似为dx.振动拉伸后：

$$ds \approx \sqrt{(dx)^2 + (du)^2}$$
$$= dx\sqrt{1 + (du/dx)^2}$$
$$\approx dx$$

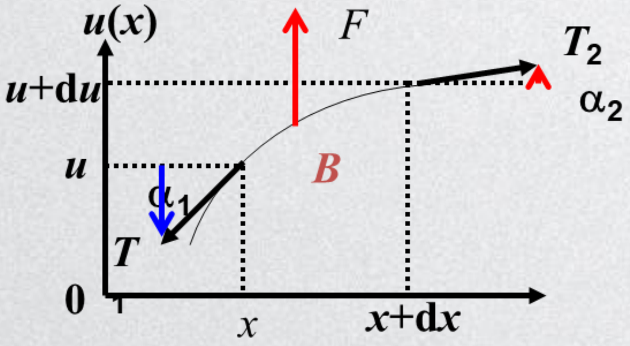
B段的质量：弦长dx，质量线密度ρ，则**B段**质量 $m = \rho dx$

物理规律：

用牛顿运动定律分析**B段**弦的受力及运动状态：

牛顿运动定律： $$f = m\frac{d^2u}{dt^2} = mu_{tt}$$

数理方程：第一章：数学物理中的偏微分方程



①沿x–方向：

弦横向振动不出现x方向平移，得力平衡方程

$$T_2\cos\alpha_2 - T_1\cos\alpha_1 = 0 \qquad (1)$$

②沿垂直于x–轴方向：

由牛顿运动定律得运动方程

$$T_2\sin\alpha_2 - T_1\sin\alpha_1 + F(x,t)\mathrm{d}x = (\rho\,\mathrm{d}x)u_{tt} \qquad (2)$$

在微小振动近似下：

$$\alpha_{1,2}\to 0,\quad \cos\alpha_{1,2}\to 1.$$

由（1）式，弦中各点的张力相等 $T_2 = T_1$

$$\sin\alpha_1 \to \tan\alpha_1 = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_x = u_x\big|_x$$

$$\sin\alpha_2 \to \tan\alpha_2 = u_x\big|_{x+\mathrm{d}x}$$

$$T_2\sin\alpha_2 - T_1\sin\alpha_1 = T\left(u_x\big|_{x+\mathrm{d}x} - u_x\big|_x\right)$$

$$T(u_x\big|_{x+\mathrm{d}x}-u_x\big|_x)+F(x,t)\mathrm{d}x=(\rho\mathrm{d}x)u_{tt}$$

$$T\frac{u_x\big|_{x+\mathrm{d}x}-u_x\big|_x}{\mathrm{d}x}+F(x,t)=Tu_{xx}+F(x,t)=\rho u_{tt}$$

令 $a^2=T/\rho$ 波速a $f(x,t)=F(x,t)/\rho$

波动方程：

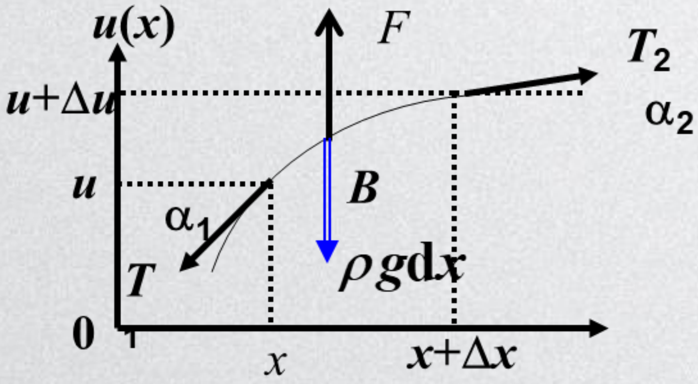
$$u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t)$$

单位质量弦所受外力，线力密度

受迫振动方程

……一维波动方程

数理方程：第一章：数学物理中的偏微分方程



讨论： 如考虑弦的重量：

沿x-方向，不出现平移

$$T_2\cos\alpha_2 = T_1\cos\alpha_1 \qquad (1)$$

沿垂直于x-轴方向

$$T_2\sin\alpha_2 - T_1\sin\alpha_1 + F(x,t)\mathrm{d}x - \rho g\mathrm{d}x = (\rho\mathrm{d}x)u_{tt} \qquad (2)$$

因为：

$$T_2\sin\alpha_2 - T_1\sin\alpha_1 = T\left(u_x\big|_{x+\mathrm{d}x} - u_x\big|_x\right) \overset{\mathrm{d}x\to 0}{=} T\mathrm{d}u_x = T\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) \qquad T\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) + F(x,t)\mathrm{d}x - \rho g\mathrm{d}x = (\rho\mathrm{d}x)u_{tt}$$

所以有： $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial u^2}{\partial x^2} = f - g$$ -------非齐次方程 ………一维波动方程

忽略重力和外力作用： $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial u^2}{\partial x^2} = 0$$ -------齐次方程

数理方程：第一章：数学物理中的偏微分方程

（二）输动问题--扩散问题

扩散现象： 系统的浓度不均匀时，将出现物质从高浓度处向低浓度处转移的现象，称之为**扩散**。

数学建模： 建立空间各点浓度$u(x,y,z,t)$的方程

物理规律： 以扩散定律和粒子数守恒定律为研究基础

①扩散定律即裴克定律： 这是一条实验定律

②粒子数守恒定律： 单位时间内流入某一体积的粒子数与流出这一体积的粒子数之差等于此体积内的单位时间内粒子数的增加量

处理方法： 在浓度不均匀的无源空间，划出任一小立方体V为研究对象，分析浓度变化规律。

数理方程：第一章：数学物理中的偏微分方程

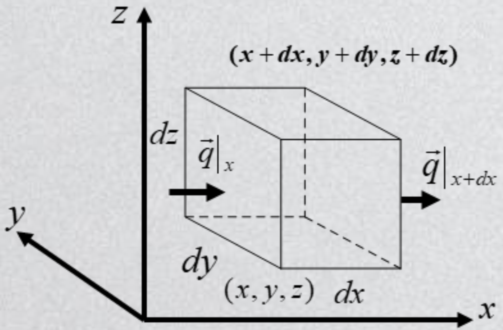
处理方法：在浓度不均匀的无源空间，划出任一小立方体V为研究对象，分析浓度变化规律。

设定： 浓度不均匀： 用浓度梯度∇u表示；

体元 V内粒子数：$u(x,y,x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

扩散流强弱（强度）：用单位时间通过单位面积的物质的量 $\vec{q}$ 表示；

扩散流强度与浓度梯度间关系：采用裴克实验定律确定



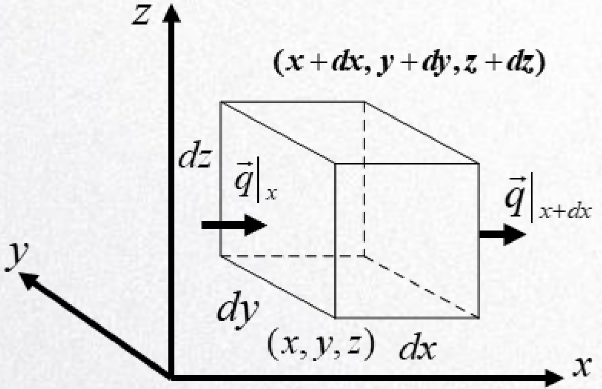
扩散（裴克）实验定律：

扩散系数

$$\vec{q} = -D\nabla u = -D\left(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\right)$$

数理方程：第一章：数学物理中的偏微分方程

下面由粒子数守恒定律建立V内粒子数变化规律。



考察沿x–方向扩散流情况:

单位时间沿x–方向净流入量

$$= -(q|_{x+dx} - q|_x)dydz = -\frac{\partial q}{\partial x}dxdydz$$

负号表示扩散方向与浓度梯度方向相反

同理沿y和沿z方向净流入量 $-\frac{\partial q}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\quad -\frac{\partial q}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

单位时间内向V的净流入量 $-\frac{\partial q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\frac{\partial q}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\frac{\partial q}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

单位时间内V内粒子数的增加量 $\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

由粒子数守恒定律，有

$$-\frac{\partial q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\frac{\partial q}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\frac{\partial q}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

数理方程：第一章：数学物理中的偏微分方程

$$-\frac{\partial q}{\partial x}dxdydz-\frac{\partial q}{\partial y}dxdydz-\frac{\partial q}{\partial z}dxdydz=\frac{\partial u}{\partial t}dxdydz$$

$$\vec{q}=-D\nabla u,q_x=-D\frac{\partial u}{\partial x}$$

代入扩散定律

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}(D\frac{\partial u}{\partial x})-\frac{\partial}{\partial y}(D\frac{\partial u}{\partial y})-\frac{\partial}{\partial z}(D\frac{\partial u}{\partial z})=0}$$

三维扩散方程

讨论：

如果扩散是均匀的，即D是一常数，则可以令$D=a^2$，则有

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\nabla^2 u=\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\Delta_3 u=0$$

如果所研究的空间存在扩散源，源强度与$u(x,y,z,t)$无关，且为$F(x,y,z)$，这时扩散方程修改为$u_t-a^2\Delta_3 u=F(x,y,z,t)$

如果所研究的空间存在源，源强度与$u(x,y,z,t)$成正比，即$F(x,y,z)=b^2u(x,y,z)$ 这时扩散方程修改为$u_t-a^2\Delta_3 u=b^2u(x,y,z,t)$

（三）泊松方程或拉普拉斯方程:稳定场问题

密度场：密度在空间的分布构成一个标量场。

有扩散源时系统的密度场满足非齐次扩散方程 $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{t}} = \boldsymbol{a}^2 \Delta_3 \boldsymbol{u} + \boldsymbol{F}$

稳定状态：密度$\boldsymbol{u}$不随时间变化，则

$$\boldsymbol{a}^2 \Delta_3 \boldsymbol{u} = -\boldsymbol{F}$$ 泊松方程

无扩散源：$\boldsymbol{F}=0$

$$\Delta_3 \boldsymbol{u} = 0$$ 拉普拉斯方程

例1 热传导

热传导现象： 当导热介质中各点的温度分布不均匀时，有热量从高温处流向低温处

数学建模： 所要研究的物理量：温度 $u(x,y,z,t)$

设定：

温度不均匀：用温度梯度 ∇u 表示；

传热的强弱即热流强度：用单位时间内通过单位面积的热量 $\vec{q}$ 表示；

物理规律： 采用傅里叶实验定律

傅里叶定律： $\boxed{\vec{q} = -k\nabla u}$

沿曲面法向流出热量： $\boxed{\vec{q}_n = -k\dfrac{\partial u}{\partial n}\hat{n}}$

热传导系数

数理方程：第一章：数学物理中的偏微分方程

处理方法：在温度不均匀的无源空间，划出任一封闭曲面S包围的体积元V（如图）。

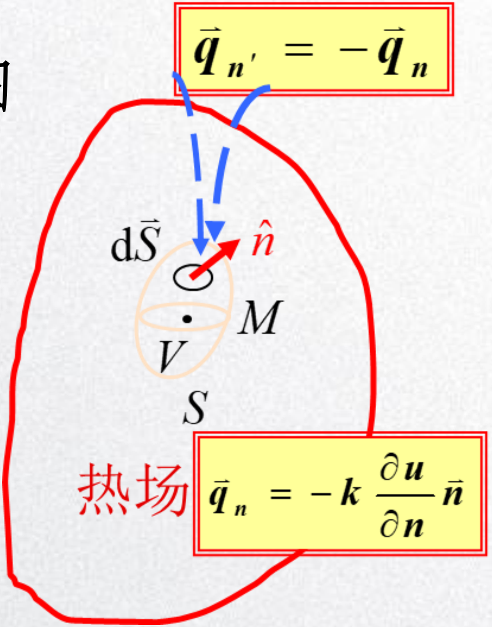
①在S上选取任一足够小的微面元dS，在此面元范围内热流强度近似为常量。

那么在dt时间内从dS流入V的热量为($\hat{n}$ 向为正)：

$$\mathrm{d}Q = \vec{q}_{n'} \cdot \mathrm{d}\vec{S}dt = -\vec{q}_n \cdot \mathrm{d}\vec{S}dt = k\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot \hat{n}$$

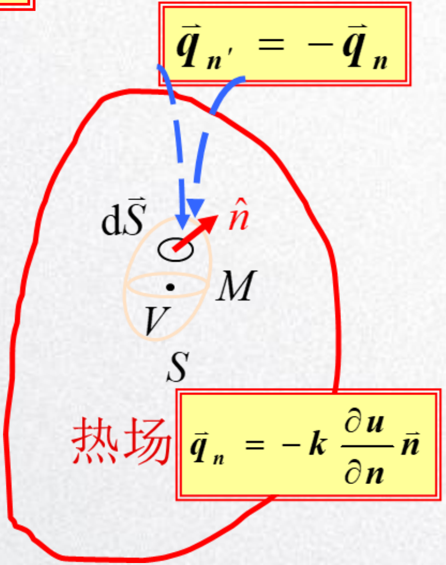
$$= k\left(\nabla u \cdot \hat{n}\right)\mathrm{d}S\mathrm{d}t = k\nabla u \cdot \mathrm{d}\vec{S}\mathrm{d}t$$



②有限时间内即时刻t_1到t_2通过闭曲面S流入V的热量为

$$\boxed{\oint\!\!\!\oint_S k\nabla u\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\iiint_V \nabla\cdot(k\nabla u)\mathrm{d}V}$$

$$Q_1=\int_{t_1}^{t_2}\left[\oint\!\!\!\oint_S k\nabla u\cdot \mathrm{d}\vec{S}\right]\mathrm{d}t$$



高斯公式（矢量散度的体积分等于该矢量对包围该体积的面积分）

$$Q_1=\int_{t_1}^{t_2}\iiint_V k\nabla^2 u\,\mathrm{d}V\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\iiint_V k\Delta_3 u\,\mathrm{d}V\mathrm{d}t$$

流入的热量：$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} \iiint_V k\Delta_3 u \mathrm{d}V\mathrm{d}t$

③流入的热量导致V内的温度发生变化 $u(x,y,z,t_1) \to u(x,y,z,t_2)$

④温度发生变化需要的热量(c比热容，ρ质量密度)：

$$Q_2 = \iiint c\rho[u(x,y,z,t_2) - u(x,y,z,t_1)]\mathrm{d}V$$

$$= \iiint_V c\rho \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}t\mathrm{d}V = \int_{t_1}^{t_2} \iiint_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}V\mathrm{d}t$$

$$Q_1 = Q_2 \longrightarrow \int_{t_1}^{t_2} \iiint_V k\Delta_3 u \mathrm{d}V\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \iiint_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}V\mathrm{d}t$$

$$\longrightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c\rho}\Delta_3 u = a^2\Delta_3 u$$ 热传导方程

如果物体内有热源，则温度满足非齐次热传导方程 $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta_3 u + f$

总结：

热传导：热量的传递；扩散：粒子的运动，两者本质不同，但满足同一微分方程

例2 静电场电势问题。

物理问题：在介电常数为ε的介质空间，存在电荷分布$\rho(x,y,z)\Rightarrow$激发电场$\Rightarrow$ 形成电势分布$u(x,y,z)$。

数学建模：建立电势$u(x,y,z)$与电荷密度$\rho(x,y,z)$的关系。

物理规律：由电磁学可知，静电场满足静电学高斯定理、环路定理和介质方程。

环路定理: $$\nabla\times\vec{E}=0 \qquad (1)$$

高斯定理: $$\nabla\cdot\vec{D}=\rho \qquad (2)$$

介质方程: $$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$$

其中: $$\nabla=\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

由电场的高斯定理 $\nabla\cdot\vec{D}=\rho\Rightarrow\nabla\cdot\vec{E}=\rho/\varepsilon$

设电势为: $u(x,y,z)$。

由电场的环路定理，可知静电场是一个保守场. 由保守场的性质，引入电势u,且电场是电势梯度的负值，即$\nabla u=\vec{E}$

$\nabla\cdot\vec{E}=\rho/\varepsilon$

进一步对电场取散度，有: $\nabla\cdot\vec{E}=\nabla\cdot(-\nabla u)=-\nabla\cdot\nabla u=-\Delta_3 u$

泊松方程

$$\Delta_3 u=-\rho/\varepsilon$$

若空间无电荷，即电荷密度0，上式成为 $\Delta_3 u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$

称这个方程为**拉普拉斯方程**.

1.2 定解条件

数学物理方程的定解

在给定的边界条件和初始条件下，根据已知的物理规律，在给定的区域里解出某个物理量u，即求$u(x,y,z,t)$。

1 数学物理方程：不带有边界和初始条件的方程称为泛定方程。

它反映了问题的共性。

2 定解条件：边界条件和初始条件的总体。

它反映了问题的特殊性，即个性。

数理方程：第一章：数学物理中的偏微分方程

（一） 初始条件——描述系统的初始状态

A、 波动方程的初始条件

波动方程含有时间的二阶导数，所以需二个初始条件

$$\begin{cases} u\big|_{t=0} = \varphi(x) & \text{系统各点的初位移} \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) & \text{系统各点的初速度} \end{cases}$$

B、热传导方程的初始条件

热传导方程含有时间的一阶导数，所以需一个初始条件，初始时刻的温度分布：

$$u(x,t)\big|_{t=0} = \varphi(x)$$

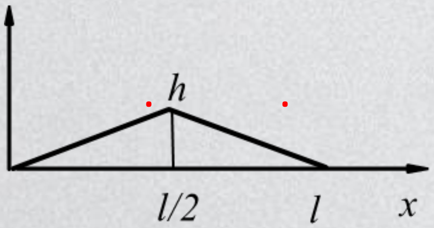
C、泊松方程和拉普拉斯方程的初始条件

此类导方程不含时间的导数，所以不需要有初始条件

数理方程：第一章：数学物理中的偏微分方程

注意：初始条件给出系统在初始状态下物理量的分布，而不是某一位置处的情况。$\varphi(x,y,z)$ 和 $\psi(x,y,z)$ 是空间坐标的函数

例 1：一根长为l的弦，两端固定于0和l。在中点位置将弦沿着横向拉开距离h，如图所示，然后放手任其振动，试写出初始条件。



解：初始时刻就是放手的那一瞬间，弦的形状如图所示，且弦处于静止状态，即有方程

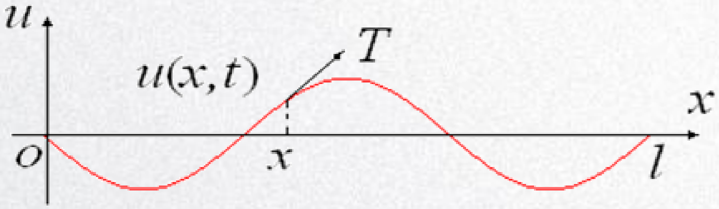
初始速度 $u_t(x,t)\big|_{t=0}=0$

初始位移 $$u(x,t)\big|_{t=0}=\begin{cases}\dfrac{2h}{l}x & x\in[0,\dfrac{l}{2}]\\ \dfrac{2h}{l}(l-x) & x\in[\dfrac{l}{2},l]\end{cases}$$

（二）边界条件

定义：系统的物理量在边界上具有的情况。

常见的线性边界条件分为三类：



A. 第一类（狄利克雷）边界条件

给出未知函数在边界上的函数值。

例2：两端固定的弦振动时的边界条件：

$$u(x,t)\big|_{x=0}=0 \quad 和 \quad u(x,t)\big|_{x=l}=0$$

数理方程：第一章：数学物理中的偏微分方程

例3：细杆热传导

细杆$x=l$端的温度处于恒温状态,边界的数理方程

$$u(x,t)\big|_{x=l}=u_0$$

细杆在$x=l$端的温度随时间变化,设温度变化规律为$f(t)$,边界的数理方程

$$u(x,t)\big|_{x=l}=f(t)$$

第一类边界条件的基本形式:

$$\boxed{u(x,y,z,t)\big|_{\text{边界}x_0,y_0,z_0}=f(x_0,y_0,z_0,t)}$$

数理方程：第一章：数学物理中的偏微分方程

B. 第二类（诺伊曼）边界条件

给出未知函数在边界上的法线方向的导数之值。

例4：细杆热传导

我们用傅里叶(热传导)定律来建立边界的数学物理方程.（傅里叶实验定律:单位时间内,通过单位面积的热流为）

$$\vec{q} = -k\nabla u$$

其中u是所在位置处物体的k是传热系数。

设细杆沿x轴方向,则一维傅里叶实验定律改写为 $\vec{q}_x = -ku_x\vec{i}$

细杆$x=a$端点绝热的边界条件: $u_x(x,t)\big|_{x=a} = 0$

细杆$x=a$端点有热流$kf(t)$流出的边界条件: $u_x(x,t)\big|_{x=a} = -f(t)$

第二类边界条件的基本形式: $\boxed{\left.\dfrac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial n}\right|_{边界x_0,y_0,z_0} = f(x_0,y_0,z_0,t)}$

C. 第三类（混合）边界条件

先引入两个基本物理定律：

1.牛顿冷却定律：单位时间内，通过物体单位表面流入周围介质的热流（即流出热流）为 $\vec{q}=h(u-\theta)\vec{n}$

式中u是物体表面的温度，θ是周围介质的温度，h是热交换系数。

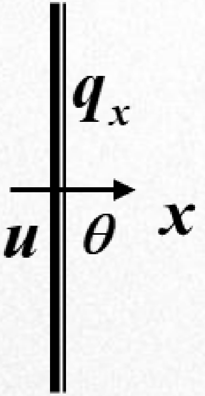
在一维情况下，牛顿冷却定律简化为

$$\vec{q}_x=h(u-\theta)\vec{i}$$

2.一维傅里叶实验定律 $\vec{q}_x=-ku_x\vec{i}$

数理方程：第一章：数学物理中的偏微分方程

例5：写出导热细杆l端“自 由”冷却的边界条件。



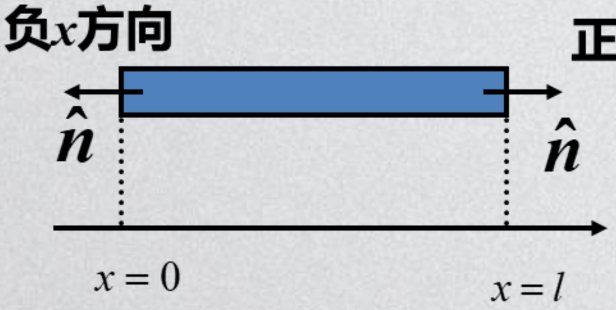
根据热传导定律，在 $x=l$ 处：

流出热流强度 $\quad q_x=-ku_x$

由牛顿冷却定律，此流出热量与细杆和外界的温度差成正比，即

$$-ku_x\big|_{x=l}=q_x=h(u\big|_{x=l}-\theta)$$

即：$(u+Hu_x)\big|_{x=l}=\theta \quad (H=k/h)$



讨论：如图情况

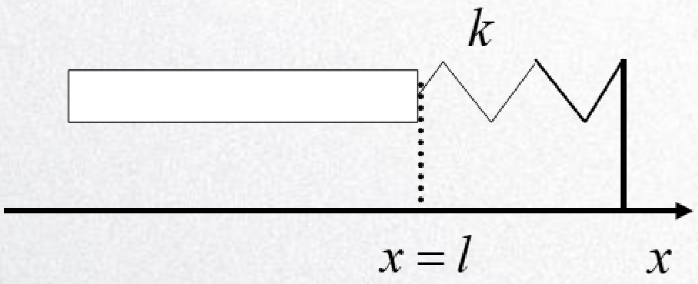
在$x=0$ 处：$q_x=ku_x$

$$ku_x\big|_{x=0}=h(u\big|_{x=0}-\theta)$$

$$(u-Hu_x)\big|_{x=0}=\theta$$

例6：细杆纵振动： 端点与固定点弹性连接。应力为弹性力

胡克定律： $f = ESu_x$



弹性力： $f = -ku \qquad -ku = ESu_x$

则在端点 $\displaystyle (u + \frac{ES}{k} u_x)\Big|_{x=l} = 0$

第三类边界条件的基本形式： $$\boxed{(u + H\frac{\partial u}{\partial n})\Big|_{\text{边界}x_0, y_0, z_0} = f(x_0, y_0, z_0, t)}$$

这些是最常见的线性边界条件，还有其它形式。

（三）衔接条件

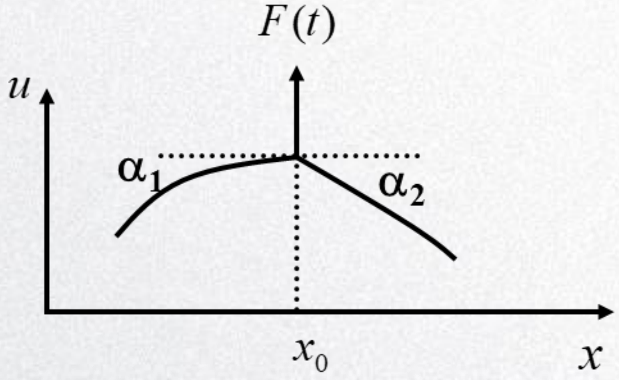
系统中可能出现物理性质急剧变化的点(跃变点)。如两节具有不同的杨氏模量的细杆在 $x=0$ 处连接，这一点就是跃变点。跃变点两边的物理过程因此不同。但在跃变点，某些物理量仍然可以是连续的，这就构成衔接条件。

例7 横向力$F(t)$集中作用于弦上x_0点，使x_0点成为折点（如图）。

弦在折点x_0的左右斜率不同。 $u_x(x_0-0)\neq u_x(x_0+0)$

即斜率有跃变，则u_{xx}在折点x_0不存在，也即此点处弦振动方程不成立。只能把弦以x_0为界分为二段。但二段是同一根弦，它们间相互关连。因此要建立此关系：

①折点处位移极限值相同。 $\boxed{u(x_0-0)=u(x_0+0)}$



②折点处，横向力应与张力平衡：

$$F(t)-T\sin\alpha_1-T\sin\alpha_2=0$$

$$\sin\alpha_1\approx\tan\alpha_1=u_x(x_0-0,t)$$

$$\sin\alpha_2\approx\tan\alpha_2=-u_x(x_0+0,t)$$

即 $\boxed{Tu_x(x_0+0,t)-Tu_x(x_0-0,t)=-F(t)}$

这两个等式就是构成两段衔接的是**衔接条件**。

例 8 长为 l 的弦在 $x=0$ 端固定，另一端 $x=l$ 自由，且在初始时刻 t=0 时处于水平状态，初始速度为 $x(l-x)$，且已知弦作微小横振动，试写出此定解问题.

[解] (1) 确定泛定方程：

取弦的水平位置为 轴，$x=0$ 为原点，弦作自由（无外力）横振动，所以泛定方程为齐次波动方程 $u_{tt}-a^2u_{xx}=0$

(2) 确定边界条件

对于弦的固定端，显然有 $u(x,t)|_{x=0}=0$, $u_x(x,t)|_{x=l}=0$,另一端自由，意味着弦的张力为零. 则

$$u_{xx}(x,t)\big|_{x=l}=0$$

(3) 确定初始条件

根据题意，当 $t=0$ 时，弦处于水平状态，即初始位移为零

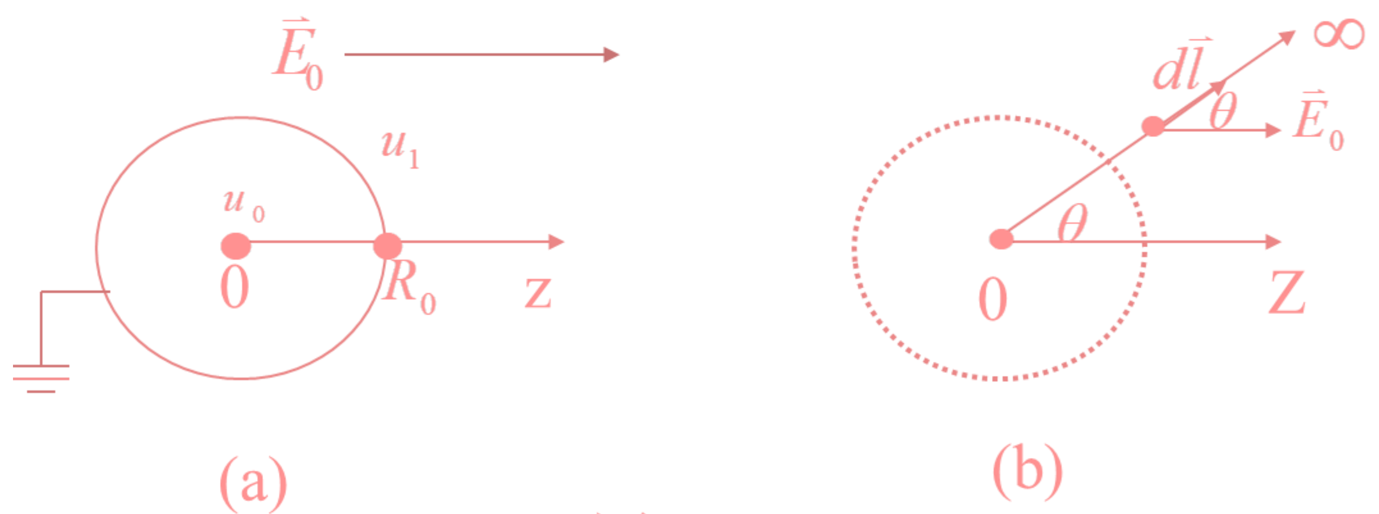
初始速度 $u(x,t)\big|_{t=0}=0$ $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}\bigg|_{t=0}=x(x-l)$

综上讨论，故定解问题为

$$
\begin{aligned}
&u_{tt}-a^2u_{xx}=0 && (0<x<l, t>0)\\
&u(x,t)\big|_{x=0}=0,\quad u_x(x,t)\big|_{x=l}=0 && (t>0)\\
&u(x,t)\big|_{t=0}=0,\quad u_t(x,t)\big|_{t=0}=x(x-l) && (0\le x\le l)
\end{aligned}
$$

例9 在均匀静电场$\boldsymbol{E_0}$ 中置入半径为R_0的导体球，若导体球接有稳恒电池，使球与地保持电势差u_0。试写出电势u满足的泛定方程与定解条件。

解：选z轴沿均匀外电场$\boldsymbol{E_0}$ 的方向，见图1 。



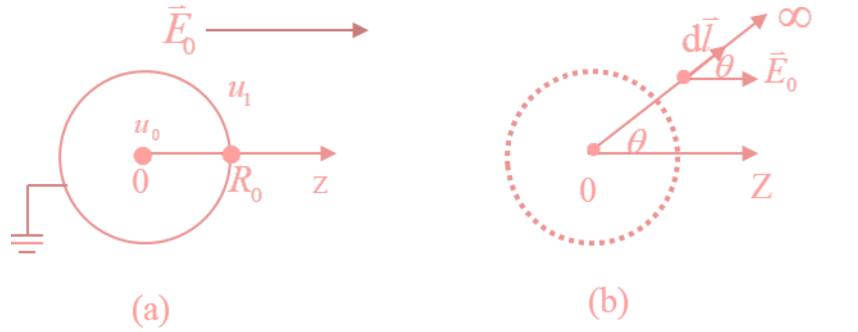
（图 1）

数理方程：第一章：数学物理中的偏微分方程

设球内外电势分别用u_0、u_1 表示。

（1）泛定方程。因为除球面上$(R=R_0)$ 有自由电荷分布外，球内外的$\rho_f=0$，故

$$\nabla^2 u_0=0,\quad R<R_0$$
$$\nabla^2 u_1=0,\quad R>R_0$$



（图 1）

（2）定解条件

给出球面与无限远最势满足的规律。

球面处：

球面上电势连续，即有边界条件 $u_0(R_0)=u_1(R_0)=u_0$

数理方程：第一章：数学物理中的偏微分方程

无限远处：可以把导体表面有限的电荷分布产生的电势和电势u_0看成点电荷和点电势源,由于点电荷在无限远处的贡献可以忽略不计，故可把目前问题简化为点电势在空间的分布问题。对于点电势，随着离开点势源的距离l的增加,电势是减少的,由图(1)可得 $\boxed{\mathrm{d}u = -\vec{E}_0 \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -E_0 \cos\theta \mathrm{d}R}$

现在计算上式从 $R=0$ 到∞的积分。由于在静电场中，上式的积分与积分的路线无关，故可取积分路线l为直线，如图(1)所示。将 $E_0\cos\theta$ 作为常数提出积分号外，并将 $u(R_0)=u_0$ 代入，便有边界条件

$$\boxed{\begin{aligned} & u|_{R\to\infty} - u_0 = -E_0 R\cos\theta |_0^R = -E_0 R\cos\theta \\ & u|_{R\to\infty} = u_0 - E_0 R\cos\theta \end{aligned}}$$

1.3 数学物理方程的分类*

（一）线性二阶偏微分方程

(1) 偏微分方程　含有未知多元函数及其偏导数的方程，如

$$F\left(x,y,\cdots,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\cdots,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\cdots\right)=0$$

其中 $u(x,y,\cdots)$ 是未知多元函数，而 $x,y,\cdots$ 是未知变量；$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\cdots$ 为 u 的偏导数.

有时为了书写方便，通常记　$u_x=\frac{\partial u}{\partial x},u_y=\frac{\partial u}{\partial y},\cdots,u_{xx}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\cdots$

数理方程：第一章：数学物理中的偏微分方程

(2) 方程的阶　偏微分方程中未知函数偏导数的最高阶数称为方程的阶.

(3) 方程的次数　偏微分方程中最高阶偏导数的幂次数称为偏微分方程的次数.

(4) 线性方程　一个偏微分方程对未知函数和未知函数的所有（组合）偏导数的幂次数都是一次的，就称为线性方程，高于一次以上的方程称为非线性方程.

(5) 准线性方程　一个偏微分方程，如果仅对方程中所有最高阶偏导数是线性的，则称方程为准线性方程.

(6) 自由项　在偏微分方程中，不含有未知函数及其偏导数的项称为自由项.

（7）方程的通解

方程的解含有任意元素（即任意常数或任意函数）

如：二阶线性非齐次偏微分方程$u_{xy}=2y-x$的通解为

$$u(x,y)=xy^2-\frac{1}{2}x^2y+F(x)+G(y)$$

其中$F(x),G(y)$ 是两个独立的任意函数.

（8）方程的特解

若函数$F(x),G(y)$的具体形式给定，则得到方程的特解。

(二) 二阶线性偏微分方程的分类

1. 二阶线性偏微分方程的一般形式

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu+f=0$$

$a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c, f$ 只是 x, y 的函数。

$f\equiv 0$ 方程为齐次的； 否则，为非齐次的.

叠加原理 泛定方程、定解条件都是线性

定解问题的解可以看作几个部分的线性叠加，只要这些部分各自所满足的泛定方程和定解条件的相应的线性叠加正好是原来的泛定方程和定解条件。

2. 二阶偏微分方程的化简

作变换: $\begin{aligned} x &= x(\xi,\eta) \\ y &= y(\xi,\eta) \end{aligned}$ 即 $\begin{aligned} \xi &= \xi(x,y) \\ \eta &= \eta(x,y) \end{aligned}$ 有 $u(x,y) \Rightarrow u(\xi,\eta)$

为使变换非奇异，其雅克比行列式满足 $\dfrac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} \neq 0$

变换运算

$$\begin{cases} u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_y \\ u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y \\ u_{xx} = \left(u_{\xi\xi}\xi_x^2 + u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_\xi \xi_{xx}\right) + \left(u_{\eta\xi}\eta_x\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\eta \eta_{xx}\right) \\ \quad\ = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi\xi_{xx} + u_\eta\eta_{xx} \\ u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy} \\ u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy} \end{cases}$$

数理方程：第一章：数学物理中的偏微分方程

采用新变量后的方程

$$A_{11}u_{\xi\xi}+2A_{12}u_{\xi\eta}+A_{22}u_{\eta\eta}+B_1u_\xi+B_2u_\eta+Cu+F=0$$

其中

$$\begin{cases}A_{11}=a_{11}\xi_x^2+2a_{12}\xi_x\xi_y+a_{22}\xi_y^2\\A_{12}=a_{11}\xi_x\eta_x+a_{12}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+a_{22}\xi_y\eta_y\\A_{22}=a_{11}\eta_x^2+2a_{12}\eta_x\eta_y+a_{22}\eta_y^2\\B_1=a_{11}\xi_{xx}+2a_{12}\xi_{xy}+a_{22}\xi_{yy}+b_1\xi_x+b_2\xi_y\\B_2=a_{11}\eta_{xx}+2a_{12}\eta_{xy}+a_{22}\eta_{yy}+b_1\eta_x+b_2\eta_y\\C=c\\F=f\end{cases}$$

数理方程：第一章：数学物理中的偏微分方程

注意A_{11}和A_{22}形式相同，ξ和η用z表示，如果 $a_{11}z_x^2+2a_{12}z_xz_y+a_{22}z_y^2=0$

则有 $A_{11}=0$,（或 $A_{22}=0$ ）

$$a_{11}\left(-\frac{z_x}{z_y}\right)^2-2a_{12}\left(-\frac{z_x}{z_y}\right)+a_{22}=0$$

注意到 $\frac{dy}{dx}=-\frac{z_x}{z_y}$

$$\boxed{a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2a_{12}\frac{dy}{dx}+a_{22}=0}$$

二阶线性偏微分方程的特征方程

特征方程的根为：$\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}\pm\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}$

通过求解此微分方程可以得到变换函数（特征线） $\xi(x,y),\eta(x,y)$ ，从而线性偏微分方程得以简化。

数理方程：第一章：数学物理中的偏微分方程

定义：$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$

1. 当判别式$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$时，从特征方程可以求得两个实函数

解 $\phi(x,y)=C_1$ 及 $\psi(x,y)=C_2$

也就是说，偏微分方程(1)有两条实的特征线. 于是取

$$\xi = \xi(x,y), \eta = \eta(x,y)$$

作为新的自变量，此时有：$A_{11} = A_{22} = 0$

方程可化为：$\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \Phi(\xi,\eta,u,\dfrac{\partial u}{\partial\xi},\dfrac{\partial u}{\partial\eta}) = 0$

数理方程：第一章：数学物理中的偏微分方程

或者进一步作变换

$$\rho=\xi+\eta,\qquad \sigma=\xi-\eta$$

于是有

$$\frac{\partial}{\partial\xi}=\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{\partial}{\partial\sigma},\qquad \frac{\partial}{\partial\eta}=\frac{\partial}{\partial\rho}-\frac{\partial}{\partial\sigma}$$

所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial\sigma^2}$$

又可以进一步将方程化为 $\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial\sigma^2}+\Phi_1(\rho,\sigma,u,\frac{\partial u}{\partial\rho},\frac{\partial u}{\partial\sigma})=0}$

这种类型的方程称为**双曲型方程**，是双曲型方程的**标准形式**．我们前面建立的波动方程就属于此类型．

数理方程：第一章：数学物理中的偏微分方程

2. 当判别式 $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ 时：这时方程重根 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a_{12}}{a_{11}}$

<u>特征线为一条实特征线</u>　$\phi(x,y) = C_0$　作变换 $\xi = \phi(x,y)$

任意选取另一个变换，$\eta = \psi(x,y)$

只要它和 $\xi = \phi(x,y)$ 彼此独立，即雅可比式 $\dfrac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} \neq 0$

方程可化为：$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \Phi(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}) = 0}$$

此类方程称为**抛物型方程**．热传导（扩散）方程就属于这种类型．

3. 当判别式 $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ 时：可以重复上面的讨论，

只不过得到的 $\phi(x,y)$ 和 $\psi(x,y)$ 是一对共轭的复函数，

或者说，两条特征线是一对共轭复函数族：

$$\xi = \phi(x,y), \quad \eta = \psi(x,y)$$

是一对共轭的复变量. 进一步引进两个新的实变量

$$\rho = \xi + \eta, \qquad \sigma = \mathrm{i}(\xi - \eta)$$

于是

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \rho} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial \sigma}, \qquad \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \rho} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial \sigma}$$

所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\sigma^2}$$

方程进一步化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\sigma^2}+\Phi_2(\rho,\sigma,u,\frac{\partial u}{\partial\rho},\frac{\partial u}{\partial\sigma})=0$$

这种类型的方程称为**椭圆型方程**. 拉普拉斯(Laplace)方程、泊松(Poisson)方程和Helmholtz 方程都属于这种类型.

小结：

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu+f=0$$

判别式 $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$

$\Delta > 0$	双曲型	波动方程
$\Delta = 0$	抛物线型	热传导方程
$\Delta < 0$	椭圆型	稳定场方程

例

$u_{tt}-a^2u_{xx}=0$ 波动方程（一维）

$u_t-a^2u_{xx}=0$ 热传导方程（一维）

$u_{xx}+u_{yy}=0$ 拉普拉斯方程（二维）

例9 判断下面方程的类型

$$(1)\ 4u_{xx}+5u_{xy}+u_{yy}+u_x+u_y+2=0.$$

$$(2)\ u_{xx}+u_{xy}+u_{yy}+u_x=0.$$

解（1）因为判别式 $\Delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}=\left(\frac{5}{2}\right)^2-4=\frac{9}{4}>0$

故方程为双曲型

（2）因为判别式 $\Delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}=\left(\frac{1}{2}\right)^2-1=-\frac{3}{4}<0$

故方程为椭圆型

1.4 达朗贝尔公式　行波解

这是一种类似于常微分方程方程求解的方法，这种方法解波动方程的基本思想是:

先求出偏微分方程的通解，然后用定解条件确定特解。

关键步骤：通过变量变换，将波动方程化为便于积分的齐次二阶偏微分方程。

（一）达朗贝尔公式

思路：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(x,t) = 0 \longrightarrow \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}u(\xi,\eta) = 0$$

数理方程：第一章：数学物理中的偏微分方程

引入新变量：$\xi = x + at$　　　$\eta = x - at$

即：　$u(x,t) = u(\xi,\eta)$

$$\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

采用复合导数求导法

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

类似地

$$\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial t} = a\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{-4a^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} u(\xi,\eta) = 0}$$

数理方程：第一章：数学物理中的偏微分方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u(x,t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} u(\xi,\eta) = 0$$

（1）通解

对 η 积分：$\frac{\partial}{\partial \xi} u(\xi,\eta) = f(\xi)$ 积分常数依赖于 ξ

再积分：$u = \int f(\xi) d\xi + f_2(\eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta)$

$$u(x,t) = f_1(x+at) + f_2(x-at)$$

$f_2(x-at)$ 是以速度 a 沿 x 轴正方向运动的行波，

$f_1(x+at)$是以速度 a 沿 x 轴反方向运动的行波。

数理方程：第一章：数学物理中的偏微分方程

(2)达朗贝尔公式

确定待定函数的形式

无限长，即无边界条件

设初始条件为 $u\big|_{t=0}=\varphi(x)$ 和 $u_t\big|_{t=0}=\psi(x)$ $\quad(-\infty<x<\infty)$

$$\begin{cases} f_1(x)+f_2(x)=\varphi(x) \\ af_1'(x)-af_2'(x)=\psi(x) \end{cases} \Rightarrow f_1(x)-f_2(x)=\frac{1}{a}\int_{x_0}^{x}\psi(\xi)d\xi+f_1(x_0)-f_2(x_0)$$

$$f_1(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(\xi)d\xi+\frac{1}{2}[f_1(x_0)-f_2(x_0)]$$

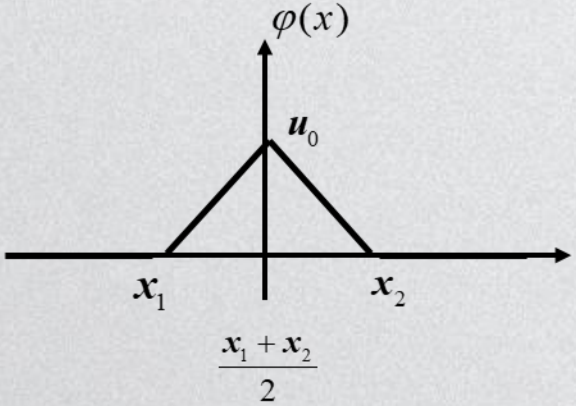
$$\left.\begin{aligned} f_1(x+at)&=\frac{1}{2}\varphi(x+at)+\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x+at}\psi(\xi)d\xi+\frac{1}{2}[f_1(x_0)-f_2(x_0)] \\ f_2(x-at)&=\frac{1}{2}\varphi(x-at)-\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x-at}\psi(\xi)d\xi-\frac{1}{2}[f_1(x_0)-f_2(x_0)] \end{aligned}\right\}\to u=f_1(x+at)+f_2(x-at)$$

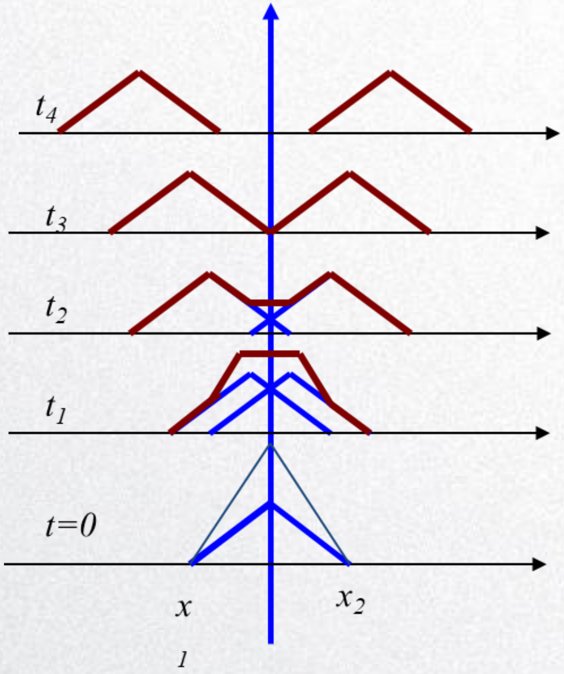
$$\boxed{u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi}$$

数理方程：第一章：数学物理中的偏微分方程

设初速度为零 $\psi(x)=0$

$$\varphi(x)=\begin{cases} 2u_0\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}, & x_1\le x\le \dfrac{x_1+x_2}{2} \\ 2u_0\dfrac{x_2-x}{x_2-x_1}, & \dfrac{x_1+x_2}{2}\le x\le x_2 \\ 0 & x<x_1, \quad x>x_2 \end{cases}$$





由达朗贝尔公式

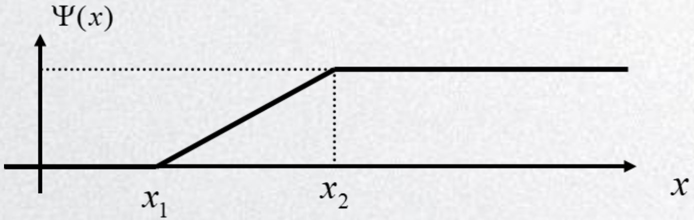
$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]$$

设初位移为零　　假使初速度在区间$[x_1,x_2]$上是常数ψ_0

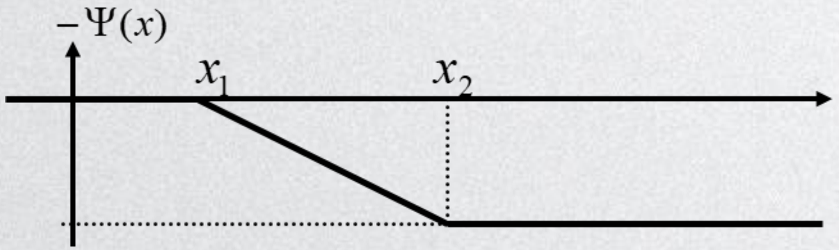
$$\varphi(x)=0 \qquad \psi(x)=\begin{cases}\psi_0 & x\in(x_1,x_2)\\ 0 & x\notin(x_1,x_2)\end{cases}$$

解：
$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi=\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{x+at}\psi(\xi)d\xi-\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{x-at}\psi(\xi)d\xi$$
其中

$$\Psi(x)=\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{x}\psi(\xi)d\xi=\begin{cases}\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{-\infty}^{x}0d\xi=0 & x\le x_1\\ \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x_1}^{x}\psi_0 d\xi=\dfrac{\psi_0}{2a}(x-x_1) & x_1\le x\le x_2\\ \dfrac{\psi_0}{2a}(x_2-x_1) & x_2\le x\end{cases}$$

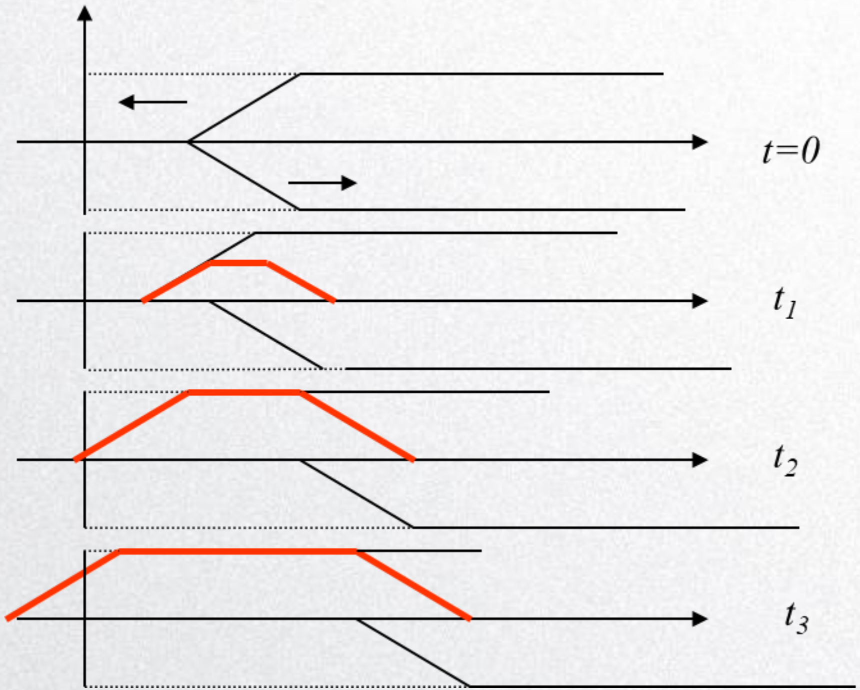


数理方程：第一章：数学物理中的偏微分方程



$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi$$

$$=\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{x+at}\psi(\xi)d\xi-\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{x-at}\psi(\xi)d\xi$$



（二）端点的反射　　半无限长弦的自由振动

一个端点固定

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(x,t) = 0 \qquad (0 < x < \infty) \\ \text{设初始条件为}\ u\big|_{t=0} = \varphi(x)\ \text{和}\ u_t\big|_{t=0} = \psi(x) \\ \text{边界条件}\quad u\big|_{x=0} = 0 \end{cases}$$

达朗贝尔公式是无限长弦的公式。由于自变量限制为$x \geq 0$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)d\xi$$

数理方程：第一章：数学物理中的偏微分方程

$t>x/a$时，上式后两项无意义，必须将 $u(x,t)$ 延拓到这个范围

$u(0,t)=0$，作奇延拓： $\varphi(x)\to\Phi(x)$ $\psi(x)\to\Psi(x)$

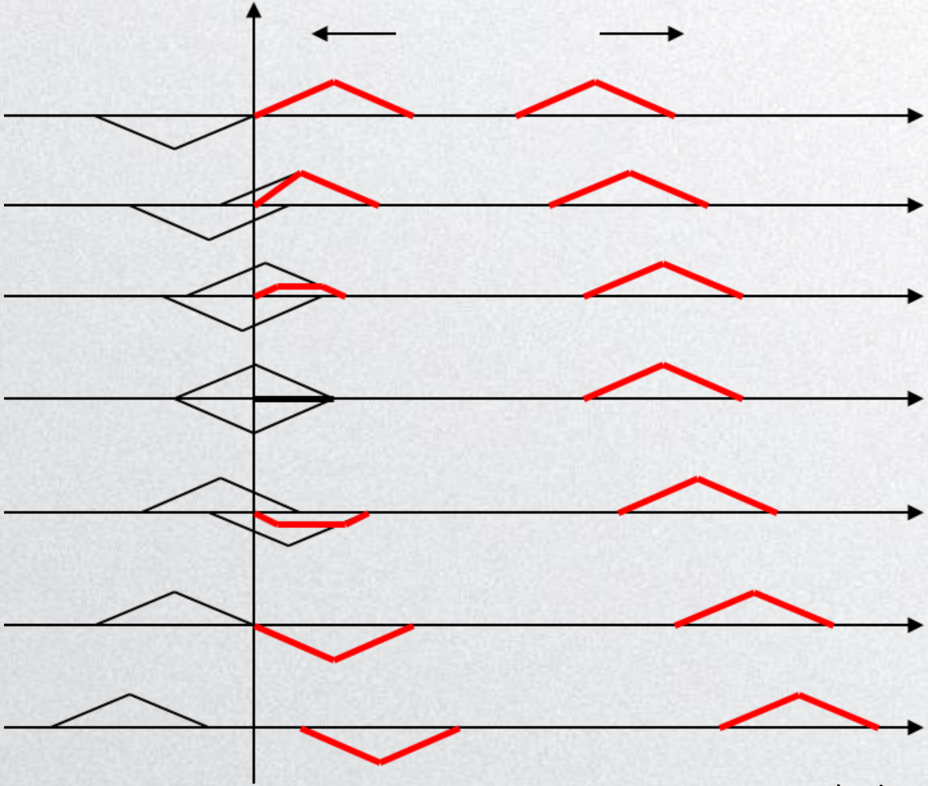
$$\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x) & (x\ge 0)\\ -\varphi(-x) & (x<0)\end{cases}\qquad \Psi(x)=\begin{cases}\psi(x) & (x\ge 0)\\ -\psi(-x) & (x<0)\end{cases}$$

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\Phi(x+at)+\Phi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(\xi)d\xi$$

$$u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi & (t\le x/a)\\ \frac{1}{2}[\varphi(x+at)-\varphi(at-x)]+\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at}\psi(\xi)d\xi & (t\ge x/a)\end{cases}$$

数理方程：第一章：数学物理中的偏微分方程

开始反射



半波损失

只有初始位移，没有初始速度

数理方程：第一章：数学物理中的偏微分方程

$$\begin{cases} 一个端点自由\ \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u(x,t) = 0 & (0 < x < \infty) \\ 设初始条件为\ u\big|_{t=0} = \varphi(x)\ 和\ u_t\big|_{t=0} = \psi(x) \\ 边界条件\ u_x\big|_{x=0} = 0 \end{cases}$$

应该是偶延拓

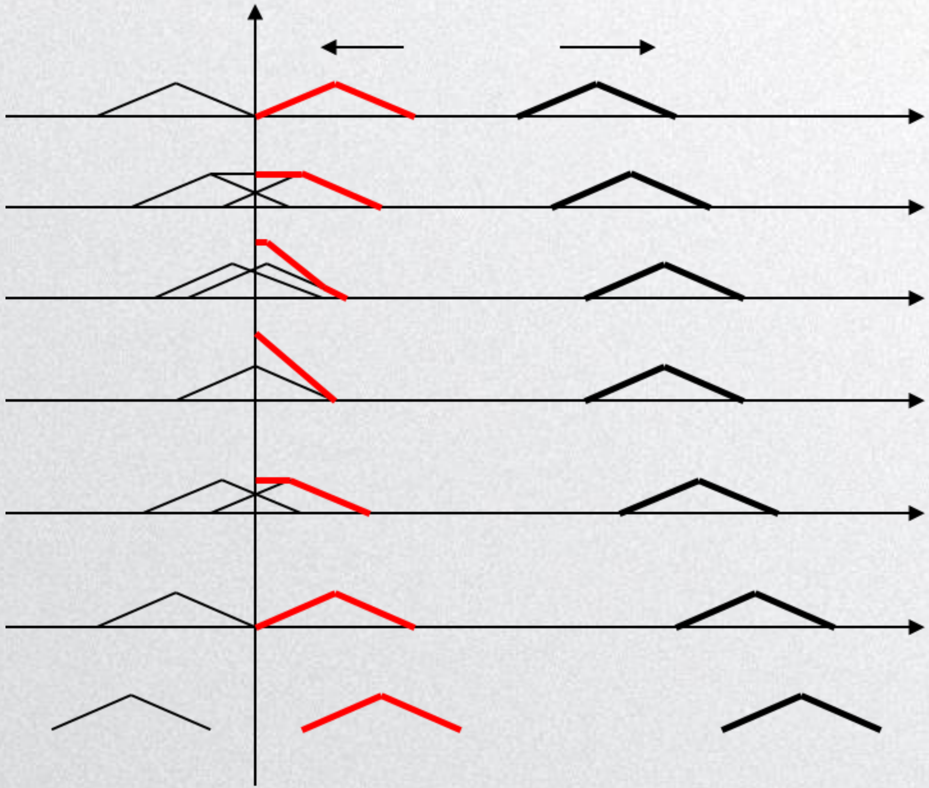
$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & (x \geq 0) \\ \varphi(-x) & (x < 0) \end{cases} \qquad \Psi(x) = \begin{cases} \psi(x) & (x \geq 0) \\ \psi(-x) & (x < 0) \end{cases}$$

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}[\Phi(x+at) + \Phi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi) d\xi}$$

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi & (t \leq x/a) \\ \dfrac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(at-x)] + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{0}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{0}^{at-x} \psi(\xi) d\xi & (t \geq x/a) \end{cases}$$

数理方程：第一章：数学物理中的偏微分方程

开始反射



无半波损失

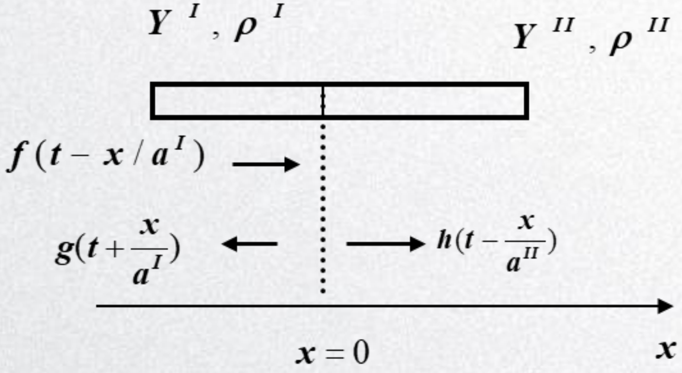
只有初始位移，没有初始速度

（三）跃变点的反射

无限长杆，$x<0$，$x>0$ 两部分的杨氏模量和密度分别为$Y^I,\rho^I,Y^{II},\rho^{II}$ 。$x=0$ 是跃变点。

设有行波 $u(x,t)=f(t-x/a^I)$ 从区域 I 向 $x=0$ 点运动。到$x=0$ 产生反射和透射。

取此波在 $t=0$ 时刻抵达 $x=0$.



$$\begin{cases} u_{tt}^I-a^2u_{xx}^I=0, & (x<0) \\ u^I\Big|_{t\le0}=f(t-\dfrac{x}{a^I}) & (x<0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{tt}^{II}-a^2u_{xx}^{II}=0, & (x>0) \\ u^{II}\Big|_{t\le0}=0,u_t^{II}\Big|_{t\le0}=0 & (x>0) \end{cases}$$

衔接条件 $\begin{cases} u^I\big|_{x=0}=u^{II}\big|_{x=0}, \\ Y^Iu_x^I\big|_{x=0}=Y^{II}u_x^{II}\big|_{x=0}, \end{cases}$

数理方程：第一章：数学物理中的偏微分方程

区域 I 中的行波: $u^I(x,t) = f(t - \frac{x}{a^I}) + g(t + \frac{x}{a^I}), \qquad (x < 0)$

$$t = 0 \qquad g(\frac{x}{a^I}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{g(\xi) = 0, \qquad (\xi < 0)}$$

区域 II 中，只有透射波 $u^{II}(x,t) = h(t - \frac{x}{a^{II}}) \qquad (x > 0)$

$$t = 0 \qquad h(-\frac{x}{a^{II}}) = 0, h'(-\frac{x}{a^{II}}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{h(\xi) = 0, h'(\xi) = 0 \qquad (\xi < 0)}$$

衔接条件
$$\begin{cases} f(t) + g(t) = h(t), \\ -\frac{1}{a^I} Y^I [f'(t) - g'(t)] = -\frac{1}{a^{II}} Y^{II} h'(t) \end{cases} \qquad (t > 0)$$

$$\begin{cases} f(t) + g(t) = h(t), \\ a^{II} Y^I [f(t) - g(t)] = a^I Y^{II} h(t) \end{cases} \qquad (t > 0) \qquad \begin{cases} h(\xi) = \dfrac{2a^{II} Y^I}{a^{II} Y^I + a^I Y^{II}} f(\xi) \\ g(\xi) = \dfrac{a^{II} Y^I - a^I Y^{II}}{a^{II} Y^I + a^I Y^{II}} f(\xi) \end{cases} \qquad (\xi > 0)$$

数理方程：第一章：数学物理中的偏微分方程

$$h(t-\frac{x}{a^{II}})=\begin{cases}0 & (t<\frac{x}{a^{II}})\\ \frac{2a^{II}Y^{I}}{a^{II}Y^{I}+a^{I}Y^{II}}f(t-\frac{x}{a^{II}}) & (t>\frac{x}{a^{II}})\end{cases}$$

$$g(t+\frac{x}{a^{I}})\begin{cases}0 & (t<\frac{-x}{a^{I}})\\ \frac{a^{II}Y^{I}-a^{I}Y^{II}}{a^{II}Y^{I}+a^{I}Y^{II}}f(t+\frac{x}{a^{I}}) & (t>\frac{-x}{a^{I}})\end{cases}$$

又 $$\left|\frac{a^{II}Y^{I}-a^{I}Y^{II}}{a^{II}Y^{I}+a^{I}Y^{II}}\right|^2+\left|\frac{2a^{II}Y^{I}}{a^{II}Y^{I}+a^{I}Y^{II}}\right|^2=1$$

$\left|\frac{a^{II}Y^{I}-a^{I}Y^{II}}{a^{II}Y^{I}+a^{I}Y^{II}}\right|^2$ 反射系数 $\left|\frac{2a^{II}Y^{I}}{a^{II}Y^{I}+a^{I}Y^{II}}\right|^2$ 透射系数

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi$$

从达朗贝尔公式可以看出，波动方程的解，是初始条件的演化。方程本身并不可能产生出超出初始条件的，额外的形式来。

而这种演化又受到边界条件的限制。

这就说明了初始条件和边界条件在确定波动方程的解时的重要性。

达朗贝尔解表示沿x轴正、反向传播的两列波的叠加

例9 $(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2})u(x,t)=0\quad(0<x<\infty)$

设初始条件为 $u|_{t=0}=\varphi(x)$ 和 $u_t|_{t=0}=\psi(x)$

边界条件 $u_x|_{x=0}=\frac{A}{YS}\sin\omega t$

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=0, & (0<x<\infty)\\ u|_{t=0}=\varphi(x), & u_t|_{t=0}=\psi(x)\\ u_x|_{x=0}=\frac{A}{YS}\sin\omega t\end{cases}$$

定解问题

分析:

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=0,\quad(0<x<\infty)$$
$$u|_{t=0}=\varphi(x),\quad u_t|_{t=0}=\psi(x)$$
$$u_x|_{x=0}=0$$

端点自由时的解

分解

$$\boxed{\begin{aligned}&u_{tt}-a^2u_{xx}=0,\quad(0<x<\infty)\\&u|_{t=0}=0,\quad u_t|_{t=0}=0\\&u_x|_{x=0}=\frac{A}{YS}\sin\omega t\end{aligned}}$$

解：通解为 $u(x,t)=f_1(x+at)+f_2(x-at)$

定解条件 $f_1(x)+f_2(x)=0$

$af_1'(x)-af_2'(x)=0$

$$f_1'(at)+f_2'(-at)=\frac{A}{YS}\sin\omega t$$

求：$f_1(\xi),\quad \xi\in(0,\infty)$

$f_2(\xi),\quad \xi\in(-\infty,\infty)$

$$\begin{aligned} &f_1(x)+f_2(x)=0 \\ &af_1'(x)-af_2'(x)=0 \Longrightarrow f_1(x)-f_2(x)=c \end{aligned} \Longrightarrow \begin{cases} f_1(x)=\dfrac{c}{2}, & x\ge 0 \\ f_2(x)=-\dfrac{c}{2}, & x\ge 0 \end{cases}$$

$$f_1'(at)+f_2'(-at)=\frac{A}{YS}\sin\omega t$$

求 $f_2(x-at)=?$

$$f_1(at)+f_2(-at)=a\int_0^t dt\,\frac{A}{YS}\sin\omega t=\frac{aA}{YS\omega}(\cos\omega t-1)$$

$$f_2(\xi)=\frac{aA}{YS\omega}(\cos\frac{\omega}{a}\xi-1)-\frac{c}{2},\qquad \xi<0$$

$$u(x,t)=f_1(x+at)+f_2(x-at)=\begin{cases}0 & t\le\dfrac{x}{a}\\ \dfrac{aA}{YS\omega}\cos\dfrac{\omega}{a}(x-at)-\dfrac{aA}{YS\omega}, & t>\dfrac{x}{a}\end{cases}$$

例11 求解Goursat问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -t < x < t, t > 0 \\ u\big|_{t=-x} = \varphi(x), \quad x \le 0 \\ u\big|_{t=x} = \psi(x), \quad x \ge 0 \end{cases}$$

其中$\varphi(0)=\psi(0)$

解：令 $\xi = x+t \quad \eta = x-t$

$$x = \frac{\xi+\eta}{2} \qquad t = \frac{\xi-\eta}{2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \quad \xi > 0, \eta < 0 \\ u\big|_{\xi=0} = \varphi(\dfrac{\eta}{2}), \quad \eta \le 0 \\ u\big|_{\eta=0} = \psi(\dfrac{\xi}{2}), \quad \xi \ge 0 \end{cases}$$

$$u = f_1(\xi) + f_2(\eta)$$

$$\varphi(\frac{\eta}{2}) = f_1(0) + f_2(\eta)$$

$$\psi(\frac{\xi}{2}) = f_1(\xi) + f_2(0)$$

$$u(\xi,\eta) = \psi(\frac{\xi}{2}) - f_2(0) + \varphi(\frac{\eta}{2}) - f_1(0)$$

$$\varphi(0) = f_1(0) + f_2(0)$$

$$\psi(0) = f_1(0) + f_2(0)$$

$$u(x,y) = \psi(\frac{x+t}{2}) + \varphi(\frac{x-t}{2}) - \varphi(0)$$

THANKS

Q & A ?