



# 工程数学

25-26年度第二学期

网络授课

课程号：00330760 工能必修+航材生限选+双培

2026.05

# ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

预备知识： $\Gamma$  函数的基本知识

(1) 定义  $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (x > 0),$

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

(2)  $\Gamma$  函数的递推公式  $\Gamma(x) = \frac{1}{x} \Gamma(x+1)$

特别的，当  $x$  为**正整数** $n$  时，有

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \cdots = n!\Gamma(1) = n!.$$

(3) 当  $n = 0, -1, -2, \cdots$  时  $\frac{1}{\Gamma(n)} = 0.$

## 第三章 特殊函数

在应用分离变量法解其他偏微分方程的定解问题时，也会导出其他形式的常微分方程边值问题，从而引出各种各样坐标函数系。这些坐标函数系就是人们常说的特殊函数。

# ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

## 3.1 贝塞尔方程及贝塞尔函数

### 一、贝塞尔方程的导出

在应用分离变量法解决圆形膜的振动问题或薄圆盘上瞬时温度分布规律时，我们就会遇到贝塞尔方程。下面，我们以圆盘的瞬时温度分布为例来导出贝塞尔方程。

设有半径为  $R$  的圆形薄盘，上下两面绝热，圆盘边界上的温度始终保持0度，且初始温度分布为已知，求圆盘内的瞬时温度分布规律。我们用  $u(x, y, t)$  来表示时刻  $t$  圆盘上点  $(x, y)$  处的温度函数。

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

这个问题归结为求解下列定解问题：

$$\begin{cases} u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) & (x^2 + y^2 < R^2), & (1) \\ u|_{x^2+y^2=R^2} = 0, & (2) \\ u|_{t=0} = \varphi(x, y). & (3) \end{cases}$$

应用分离变量法求这个问题的解。为此，令  $u(x, y, t) = V(x, y)T(t)$ ,

代入方程 (1) 得 
$$VT' = a^2(V_{xx} + V_{yy})T,$$

用  $\frac{1}{a^2VT}$  乘之，得 
$$\frac{T'}{a^2T} = \frac{V_{xx} + V_{yy}}{V} = -\lambda \quad (\lambda > 0),$$

# ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

$$\begin{cases} u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) & (x^2 + y^2 < R^2), \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} u |_{x^2+y^2=R^2} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} u |_{t=0} = \varphi(x, y). \end{cases} \quad (3)$$

于是有

亥姆霍兹方程

$$T' + \lambda a^2 T = 0, \quad (4)$$

$$V_{xx} + V_{yy} + \lambda V = 0. \quad (5)$$

方程 (4) 的解为

$$T(t) = Ae^{-\lambda a^2 t}.$$

由边界条件 (2) 有

$$V |_{x^2+y^2=R^2} T(t) = 0, \quad \longrightarrow \quad V |_{x^2+y^2=R^2} = 0. \quad (6)$$

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

$$\begin{cases} u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) & (x^2 + y^2 < R^2), \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} u|_{x^2+y^2=R^2} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} u|_{t=0} = \varphi(x, y). \end{cases} \quad (3)$$

为了求解方程 (5) 满足条件 (6) 的非零解，

$$\begin{cases} \underline{V_{xx} + V_{yy} + \lambda V = 0}, \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} V|_{x^2+y^2=R^2} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

我们采用平面上的极坐标系，则得定解问题

$$\begin{cases} \underline{\frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{V}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial \theta^2} + \lambda \bar{V} = 0} & (0 < r < R), \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \bar{V}|_{r=R} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{V}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial \theta^2} + \lambda \bar{V} = 0 & (0 < r < R), \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \bar{V} |_{r=R} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

再令  $\bar{V}(r, \theta) = F(r)G(\theta)$ , 代入方程 (7) 得

$$\underline{F''G} + \frac{1}{r} \underline{F'G} + \frac{1}{r^2} \underline{FG''} + \lambda \underline{FG} = 0,$$

两端乘以  $\frac{r^2}{FG}$  移项得  $\frac{G''}{G} = -\frac{r^2 F'' + rF' + \lambda r^2 F}{F} = -\mu,$

于是有

$$G'' + \mu G = 0, \quad (9)$$

$$r^2 F'' + rF' + (\lambda r^2 - \mu)F = 0. \quad (10)$$

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

$$G'' + \mu G = 0, \quad (9)$$

$$r^2 F'' + rF' + (\lambda r^2 - \mu)F = 0. \quad (10)$$

由于温度函数 $u(x, y, t)$ 是单值的, 所以 $V(x, y)$ 也必是单值函数, 即

$$\bar{V}(r, \theta) = \bar{V}(r, \theta + 2\pi), \quad \longrightarrow \quad G(\theta) = G(\theta + 2\pi),$$

求解常微分方程的边值问题

$$G'' + \mu G = 0, \quad G(\theta) = G(\theta + 2\pi),$$

可得

$$\mu = n^2 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$G_0(\theta) = \frac{1}{2} a_0$$

$$G_n(\theta) = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta. \quad (n = 1, 2, \dots)$$

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

$$G'' + \mu G = 0, \quad (9)$$

$$r^2 F'' + rF' + (\lambda r^2 - \mu)F = 0. \quad (10)$$

将  $\mu = n^2$  代入方程 (10) 得

$$r^2 F'' + rF' + (\lambda r^2 - n^2)F = 0, \quad (11)$$

该方程叫做  $n$  阶贝塞尔方程。

由边界条件 (8)  $\bar{V}|_{r=R} = 0$  可知  $\bar{V}(R, \theta) = F(R)G(\theta) = 0$ ,  $\longrightarrow F(R) = 0$ .

另外, 由于圆盘上的温度是有限的, 特别在圆心处也应如此, 由此可得

$$|F(0)| < +\infty,$$

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

因此，原定解问题的最后解决就归结为求问题

$$\begin{cases} r^2 F'' + rF' + (\lambda r^2 - n^2)F = 0, \\ F(R) = 0 \quad |F(0)| < +\infty, \end{cases} \quad (11)$$

的固有值与固有函数。

若令  $x = \sqrt{\lambda}r$ ，并记  $F(r) = F\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) = y(x)$ ，则

$$F_r = y_x \cdot \sqrt{\lambda},$$

$$F_{rr} = (y_{xx} \cdot \sqrt{\lambda}) \cdot \sqrt{\lambda} = y_{xx} \cdot \lambda,$$

将上式代入方程 (11) 可得

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0. \quad (12)$$

方程 (12) 是具有变系数的二阶线性常微分方程，它的解称为 **贝塞尔函数**。（有时称之为 **柱函数**）。

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0. \quad (12)$$

### 二、贝塞尔函数

由微分方程解的理论知：方程(12)有如下形式的广义幂级数解：

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{s+k} \quad (a_0 \neq 0), \quad (13)$$

其中  $s$  为常数，下面来确定  $s, a_k (k = 0, 1, 2, \dots)$ .

为此，将(13)以及  $y' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (s+k)x^{s+k-1}$ ,

带入方程(12)  $y'' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (s+k-1)(s+k)x^{s+k-2}$

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0. \quad (12)$$

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{s+k} \quad (a_0 \neq 0), \quad (13)$$

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (s+k)x^{s+k-1}, \quad y'' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (s+k-1)(s+k)x^{s+k-2}$$

可得 
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (s+k-1)(s+k)x^{s+k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (s+k)x^{s+k} - n^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{s+k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{s+k+2} = 0,$$



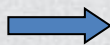
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k [(s+k-1)(s+k) + (s+k) - n^2] x^{s+k} + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^{s+k} = 0,$$

# ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0. \quad (12)$$

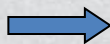
$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{s+k} \quad (a_0 \neq 0), \quad (13)$$



$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k [(s+k)^2 - n^2] x^{s+k} + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^{s+k} = 0,$$



$$(s^2 - n^2)a_0 x^s + [(s+1)^2 - n^2]a_1 x^{s+1} + \sum_{k=2}^{\infty} a_k [(s+k)^2 - n^2] x^{s+k} + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^{s+k} = 0,$$



$$(s^2 - n^2)a_0 x^s + [(s+1)^2 - n^2]a_1 x^{s+1} + \sum_{k=2}^{\infty} \{[(s+k)^2 - n^2]a_k + a_{k-2}\} x^{s+k} = 0,$$

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{s+k} \quad (a_0 \neq 0), \quad (13)$$

$$(s^2 - n^2)a_0 x^s + [(s+1)^2 - n^2]a_1 x^{s+1} + \sum_{k=2}^{\infty} \{[(s+k)^2 - n^2]a_k + a_{k-2}\} x^{s+k} = 0,$$

比较上式两边系数则

有  $(s^2 - n^2)a_0 = 0, \quad (14)$

$$[(s+1)^2 - n^2]a_1 = 0, \quad (15)$$

$$[(s+k)^2 - n^2]a_k + a_{k-2} = 0 \quad (k = 2, 3, \dots) \quad (16)$$

由于  $a_0 \neq 0$ , 从 (14) 可得  $s_1 = n, s_2 = -n$ .

下面分三种情形讨论

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{s+k} \quad (a_0 \neq 0), \quad (13)$$

$$[(s+1)^2 - n^2]a_1 = 0, \quad (15)$$

$$[(s+k)^2 - n^2]a_k + a_{k-2} = 0 \quad (k=2, 3, \dots) \quad (16)$$

**情形1** 如果 $n$ 不为整数(包括0)和半奇数, 则 $s_1 - s_2 = 2n$ 也不为整数。

先取 $s_1 = n$ , 代入(15)得 $a_1 = 0$ , 代入(16)得

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(2n+k)}. \quad (k=2, 3, \dots). \quad (17)$$

由(17)可知

$$a_1 = a_3 = a_5 = \dots = 0,$$

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{s+k} \quad (a_0 \neq 0), \quad (13)$$

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(2n+k)}. \quad (k = 2, 3, \dots). \quad (17)$$

另外

$$a_2 = -\frac{a_0}{2(2n+2)} = -\frac{a_0}{2^2 \cdot 1 \cdot (n+1)},$$
$$a_4 = -\frac{a_2}{4(2n+4)} = \frac{a_0}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)}$$
$$= \frac{a_0}{2^4 \cdot 2 \cdot 1(n+1)(n+2)},$$

.....

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{a_0}{2^{2m} \cdot m!(n+1)(n+2)\cdots(n+m)},$$

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{s+k} \quad (a_0 \neq 0), \quad (13)$$

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{a_0}{2^{2m} \cdot m!(n+1)(n+2)\cdots(n+m)},$$

由于 $a_0$ 是任意常数，我们可以这样取值：使一般项系数中2与 $x$ 有相同的次数，并且同时使分母简化。为此取  $a_0 = \frac{1}{2^n \Gamma(n+1)}$ 。

利用递推公式  $n\Gamma(n) = \Gamma(n+1)$ ，则一般项系数变为

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{1}{2^{n+2m} m! \Gamma(n+m+1)}$$

将此系数表达式代回 (13) 中，

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0. \quad (12)$$

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{s+k} \quad (a_0 \neq 0), \quad (13)$$

得到方程 (12) 的一个特解，记作  $J_n(x)$

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m} x^{n+2m} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{n+2m}}{2^{n+2m} \cdot m! \Gamma(n+m+1)}, \quad (18)$$

$J_n(x)$  称为  $n$  阶第一类贝塞尔函数。又由于

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{|u_{m+1}|}{|u_m|} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{x^2}{4(m+1)(n+m+1)} = 0 < 1$$

则由达朗贝尔判别法可知级数 (18) 在整个实轴上是绝对收敛的。

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{s+k} \quad (a_0 \neq 0), \quad (13)$$

$$[(s+1)^2 - n^2]a_1 = 0, \quad (15)$$

$$[(s+k)^2 - n^2]a_k + a_{k-2} = 0 \quad (k = 2, 3, \dots) \quad (16)$$

再令  $s_2 = -n$ , 代入 (15) 得  $a_1 = 0$ , 代入 (16) 得

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{\underline{k(-2n+k)}}. \quad (k = 2, 3, \dots).$$

由上公式可知

$$a_1 = a_3 = a_5 = \dots = 0,$$

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{s+k} \quad (a_0 \neq 0), \quad (13)$$

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(-2n+k)}. \quad (k = 2, 3, \dots).$$

另外

$$a_2 = -\frac{a_0}{2(-2n+2)} = -\frac{a_0}{2^2 \cdot 1 \cdot (-n+1)},$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{4(-2n+4)} = \frac{a_0}{2 \cdot 4(-2n+2)(-2n+4)}$$
$$= \frac{a_0}{2^4 \cdot 2 \cdot 1(-n+1)(-n+2)},$$

.....

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{a_0}{2^{2m} \cdot m!(-n+1)(-n+2)\cdots(-n+m)},$$

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{s+k} \quad (a_0 \neq 0), \quad (13)$$
$$a_{2m} = (-1)^m \frac{a_0}{2^{2m} \cdot m!(-n+1)(-n+2)\cdots(-n+m)},$$

由于 $a_0$ 是任意常数，我们可以这样取值：使一般项系数 $2$ 与 $x$ 有相同的次数，并且同时使分母简化。为此取中 $a_0 = \frac{1}{2^{-n} \Gamma(-n+1)}$ 。

利用递推公式 $n\Gamma(-n) = \Gamma(-n+1)$ ，则一般项系数变为

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{1}{2^{-n+2m} \cdot m! \Gamma(-n+m+1)}$$

将此系数表达式代回(13)中，

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0. \quad (12)$$

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{s+k} \quad (a_0 \neq 0), \quad (13)$$

得到方程 (12) 的另外一个特解，记作  $J_{-n}(x)$

$$J_{-n}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m} x^{-n+2m} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{-n+2m}}{2^{-n+2m} m! \Gamma(-n+m+1)}, \quad (19)$$

$J_{-n}(x)$  称为  $-n$  阶第一类贝塞尔函数。

由于  $n \neq -n$ ，所以  $J_n(x)$  与  $J_{-n}(x)$  线性无关，由齐次线性常微分方程解的结构定理知，方程 (12) 的通解为  $y = AJ_n(x) + BJ_{-n}(x)$ , (20)

其中  $A, B$  为两个任意常数。

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0. \quad (12)$$

$$y = AJ_n(x) + BJ_{-n}(x), \quad (20)$$

如果在 (20) 中取

$$A = \cot n\pi, \quad B = -\csc n\pi,$$

则得方程 (12) 的另一个与  $J_n(x)$  线性无关的特解, 记作

$$Y_n(x) = \frac{J_n(x) \cos n\pi - J_{-n}(x)}{\sin n\pi}. \quad (21)$$

因此方程 (12) 的通解可写成  $y = CJ_n(x) + DY_n(x)$ , (22)

$Y_n(x)$  称为第二类贝塞尔函数或诺伊曼函数。

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0. \quad (12)$$

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{s+k} \quad (a_0 \neq 0), \quad (13)$$

$$[(s+k)^2 - n^2]a_k + a_{k-2} = 0 \quad (k = 2, 3, \dots) \quad (16)$$

**情形2** 如果  $n$  为整数(包括0), 则  $s_1 - s_2 = 2n$  也为整数。

依照之前的做法, 同样可得方程(12)的两个特解

$$s_1 = n, \quad J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{n+2m}}{2^{n+2m} m! \Gamma(n+m+1)}, \quad (18)$$

$$s_2 = -n, \quad J_{-n}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{-n+2m}}{2^{-n+2m} m! \Gamma(-n+m+1)}, \quad (19)$$

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{n+2m}}{2^{n+2m} m! \Gamma(n+m+1)}, \quad (18)$$

$$J_{-n}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{-n+2m}}{2^{-n+2m} m! \Gamma(-n+m+1)}, \quad (19)$$

注意当  $n \geq 0$  为整数时，利用  $\Gamma$  函数的递推公式可得  $\Gamma(n+m+1) = (n+m)!$ ，从而特解之一(18)可化为

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{n+2m}}{2^{n+2m} m! (n+m)!}, \quad (23)$$

而此时函数  $J_{-n}(x)$  与  $J_n(x)$  线性相关。

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

$$J_{-n}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{-n+2m}}{2^{-n+2m} m! \Gamma(-n+m+1)}, \quad (19)$$

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{n+2m}}{2^{n+2m} m! (n+m)!}, \quad (23)$$

事实上，我们不妨设  $n$  为某正整数  $N$ ，当  $m = 0, 1, 2, \dots, (N-1)$  时，  
 $-n+m+1 = -N+m+1$  将是 **负整数与0**，对于这些值  $\Gamma(-N+m+1)$  为无穷大，

所以

$$J_{-N}(x) = \sum_{m=N}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{-N+2m}}{2^{-N+2m} m! \Gamma(-N+m+1)},$$

令  $m = N+k, (k = 0, 1, 2, \dots)$ ，得  $J_{-N}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{N+k} \frac{x^{N+2k}}{2^{N+2k} (N+k)! \Gamma(k+1)}$

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{n+2m}}{2^{n+2m} m!(n+m)!}, \quad (23)$$

则化简得

$$\underline{J_{-N}(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{N+k} \frac{x^{N+2k}}{2^{N+2k} k!(N+k)!} = (-1)^N \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{N+2k}}{2^{N+2k} k!(N+k)!} = (-1)^N \underline{J_N(x)}.$$

这就说明了 $J_{-n}(x)$ 与 $J_n(x)$ 当 $n(n \geq 0)$ 为**整数**时是**线性相关**的。为了求出**贝塞尔方程的通解**，我们还要求出一个与 $J_n(x)$ **线性无关**的特解。

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

$$Y_n(x) = \frac{J_n(x) \cos n\pi - J_{-n}(x)}{\sin n\pi}. \quad (21)$$

由(21)式知, 当 $n$ 不为整数时,  $Y_n(x)$ 与 $J_n(x)$ 是线性无关的, 而当 $n$ 为整数时, 由于

$$J_{-n} = (-1)^n J_n(x), \quad \cos n\pi = (-1)^n,$$

于是(21)式的右端成 " $\frac{0}{0}$ " 形式的不定型, 此时我们很自然地定义为

$$Y_n(x) = \lim_{\alpha \rightarrow n} Y_\alpha(x) = \lim_{\alpha \rightarrow n} \frac{J_\alpha(x) \cos \alpha\pi - J_{-\alpha}(x)}{\sin \alpha\pi},$$

其中 $n$ 为整数,  $\alpha$ 不为整数。

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

$$Y_n(x) = \lim_{\alpha \rightarrow n} Y_\alpha(x) = \lim_{\alpha \rightarrow n} \frac{J_\alpha(x) \cos \alpha\pi - J_{-\alpha}(x)}{\sin \alpha\pi},$$

应用洛必达法则经过冗长的推演(可参阅H. H. 列别捷夫著, 张燮译《特殊函数及其应用》, 高等教育出版社, 1987), 得

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} J_0(x) \left( \ln \frac{x}{2} + C \right) - \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{(m!)^2} \left( \frac{x}{2} \right)^{2m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k+1},$$

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi} J_n(x) \left( \ln \frac{x}{2} + C \right) - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{m!} \left( \frac{x}{2} \right)^{-n+2m} - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m!(n+m)!} \left( \frac{x}{2} \right)^{n+2m} \cdot \left( \sum_{k=0}^{n+m-1} \frac{1}{k+1} + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k+1} \right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} J_0(x) \left( \ln \frac{x}{2} + C \right) - \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{(m!)^2} \left( \frac{x}{2} \right)^{2m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k+1},$$

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi} J_n(x) \left( \ln \frac{x}{2} + C \right) - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{m!} \left( \frac{x}{2} \right)^{-n+2m} \\ - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m!(n+m)!} \left( \frac{x}{2} \right)^{n+2m} \cdot \left( \sum_{k=0}^{n+m-1} \frac{1}{k+1} + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k+1} \right)$$

$$Y_n(0) \text{ 无穷大} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

其中  $C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right) = 0.5772\dots$ , 称为**欧拉常数**。显然

$Y_n(x)$  是  $n$  阶贝塞尔方程  $J_n(x)$  线性无关特解。  
与

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0. \quad (12)$$

综上所述，不论 $n$ 是否为整数，贝塞尔方程(12)的通解都可表示为

$$y(x) = CJ_n(x) + DY_n(x),$$

其中 $C, D$ 为任意实数， $n$ 为任意实数。

另外，由 $n$ 为整数时， $J_n(-x) = (-1)^n J_n(x)$ ，推出，

当 $n$ 为偶数时， $J_n(x)$ 为偶函数；

当 $n$ 为奇数时， $J_n(x)$ 为奇函数。

情形3 当 $n$ 为半奇数时，留在下一节讨论。

# ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

## 3.2 贝塞尔函数的递推公式

不同阶的贝塞尔函数之间有一定的联系,本节来建立反映这种联系的递推公式。

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{n+2m}}{2^{n+2m} m! \Gamma(n+m+1)}, \quad (18)$$

$$Y_n(x) = \frac{J_n(x) \cos n\pi - J_{-n}(x)}{\sin n\pi}. \quad (21)$$

由 $J_n(x)$ 的表达式(18)可推出下列两个基本递推公式:

$$\frac{d}{dx} [x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x), \quad (25)$$

$$\frac{d}{dx} [x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x). \quad (26)$$

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

$$\frac{d}{dx} [x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x), \quad (25)$$

$$\frac{d}{dx} [x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x). \quad (26)$$

事实上，在(18)式的两边乘上 $x^{-n}$ ，然后对 $x$ 求导，得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [x^{-n} J_n(x)] &= \frac{d}{dx} \left[ \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{2^{n+2m} m! \Gamma(n+m+1)} \right] \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m-1}}{2^{n+2m-1} (m-1)! \Gamma(n+m+1)} \end{aligned}$$

令  $m = 1 + k$ , ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), 得

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k+1}}{2^{n+2k+1} k! \Gamma(n+1+k+1)}$$

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

$$\frac{d}{dx} [x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x), \quad (25)$$

$$\frac{d}{dx} [x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x). \quad (26)$$

事实上，在(18)式的两边乘上 $x^{-n}$ ，然后对 $x$ 求导，得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [x^{-n} J_n(x)] &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k+1}}{2^{n+2k+1} k! \Gamma(n+1+k+1)} \\ &= -x^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{n+1+2k}}{2^{n+1+2k} k! \Gamma(n+1+k+1)} = -x^{-n} J_{n+1}(x), \end{aligned}$$

同样可以证明公式(25)。

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

$$\frac{d}{dx} [x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x), \quad (25)$$

$$\frac{d}{dx} [x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x). \quad (26)$$

如果将以上两式左端的导数表出，化简后则得

$$xJ'_n(x) + nJ_n(x) = xJ_{n-1}(x), \quad xJ'_n(x) - nJ_n(x) = -xJ_{n+1}(x),$$

先后消去 $J'_n(x)$ 与 $J_n(x)$ ，则得

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x), \quad (27)$$

$$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J'_n(x). \quad (28)$$

显然 (25) (26) 式与 (27) (28) 式是等价的。

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

$$\frac{d}{dx} [x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x), \quad (25)$$

$$\frac{d}{dx} [x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x). \quad (26)$$

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x), \quad (27)$$

$$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J'_n(x). \quad (28)$$

若已知  $J_{n-1}(x)$  与  $J_n(x)$  之值，由 (27) 式可算出  $J_{n+1}(x)$  之值。

这样一来，通过 (27) 式，可以用 0 阶与 1 阶贝塞尔函数来表示任意正整数阶的贝塞尔函数。特别的，当  $n=0$  时，由 (26) 式得

$$J'_0(x) = -J_1(x);$$

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

$$\frac{d}{dx} [x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x), \quad (25)$$

$$\frac{d}{dx} [x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x). \quad (26)$$

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x), \quad (27)$$

$$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J'_n(x). \quad (28)$$

特别的，当  $n=0$  时，由 (26) 式得

$$J'_0(x) = -J_1(x);$$

当  $n=1$  时，由 (25) 式得

$$\frac{d}{dx} [xJ_1(x)] = xJ_0(x). \quad (29)$$

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x), \quad (27)$$

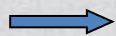
$$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J'_n(x). \quad (28)$$

$$J'_0(x) = -J_1(x); \quad \frac{d}{dx} [xJ_1(x)] = xJ_0(x). \quad (29)$$

例 求  $\int xJ_2(x)dx$

解 由 (27) 式知,  $J_2(x) = \frac{2}{x}J_1(x) - J_0(x)$ , 则有

$$xJ_2(x) = 2J_1(x) - xJ_0(x),$$



$$\int xJ_2(x)dx = 2\int J_1(x)dx - \int xJ_0(x)dx = -2J_0(x) - xJ_1(x) + c.$$

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

对于第二类贝塞尔函数，也有如下的递推公式成立：

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} [x^n Y_n(x)] = x^n Y_{n-1}(x), \\ \frac{d}{dx} [x^{-n} Y_n(x)] = -x^{-n} Y_{n+1}(x), \\ Y_{n-1}(x) + Y_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} Y_n(x), \\ Y_{n-1}(x) - Y_{n+1}(x) = 2Y'_n(x). \end{array} \right.$$

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{n+2m}}{2^{n+2m} m! \Gamma(n+m+1)}, \quad (18)$$

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x), \quad (27)$$

当  $n$  为半奇数时的贝塞尔函数的一个重要特点是可用初等函数表示。

先计算  $J_{\frac{1}{2}}(x)$ , 由 (18) 式得

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{\frac{1}{2}+2m}}{2^{\frac{1}{2}+2m} m! \Gamma(\frac{1}{2} + m + 1)},$$

利用  $\Gamma$  函数的性质, 得

$$\begin{aligned} \Gamma(\frac{3}{2} + m) &= (\frac{1}{2} + m) \Gamma(\frac{1}{2} + m) = (m + \frac{1}{2})(m - \frac{1}{2}) \Gamma(m - \frac{1}{2}) \\ &= \dots = (m + \frac{1}{2})(m - \frac{1}{2}) \dots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m+1)}{2^{m+1}} \sqrt{\pi}, \end{aligned}$$

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{n+2m}}{2^{n+2m} m! \Gamma(n+m+1)}, \quad (18)$$

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x), \quad (27)$$

从而

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x. \quad (30)$$

同样可得

$$J_{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x. \quad (31)$$

应用公式 (27) 得

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = \frac{1}{x} J_{\frac{1}{2}}(x) - J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left( -\cos x + \frac{1}{x} \sin x \right) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{\frac{3}{2}} \cdot \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right) \left( \frac{\sin x}{x} \right).$$

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{n+2m}}{2^{n+2m} m! \Gamma(n+m+1)}, \quad (18)$$

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x), \quad (27)$$

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{\frac{3}{2}} \cdot \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right) \left( \frac{\sin x}{x} \right).$$

同理，应用公式 (27) 得

$$\begin{aligned} J_{-\frac{3}{2}}(x) &= \frac{1}{x} J_{-\frac{1}{2}}(x) - J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} (-\sin x + \frac{1}{x} \cos x) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{\frac{3}{2}} \cdot \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right) \left( \frac{\cos x}{x} \right). \end{aligned}$$

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

$$J_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x. \quad J_{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{\frac{3}{2}} \cdot \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right) \left( \frac{\sin x}{x} \right).$$

$$J_{-\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{\frac{3}{2}} \cdot \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right) \left( \frac{\cos x}{x} \right).$$

一般的，有

$$J_{\frac{2m+1}{2}} = (-1)^m \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{m+\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^m \left( \frac{\sin x}{x} \right),$$

$$J_{-\frac{2m+1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{m+\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^m \left( \frac{\cos x}{x} \right),$$

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

一般的，有

$$J_{\frac{2m+1}{2}} = (-1)^m \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{m+\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^m \left( \frac{\sin x}{x} \right),$$

$$J_{-\frac{2m+1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{m+\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^m \left( \frac{\cos x}{x} \right),$$

这里为了方便起见，我们采用微分算子  $\left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^m$ ，它是算子  $\frac{1}{x} \frac{d}{dx}$  连续作用

$m$  次的缩写。例如

$$\left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^2 \left( \frac{\sin x}{x} \right) = \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left( \frac{\sin x}{x} \right) \right].$$

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

### 3.3 勒让德方程的引出

在球坐标系下

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi & (0 \leq r < \infty, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi) \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

Laplace方程的表达式为

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

令  $u(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$  代入上式得

$$\frac{\Theta\Phi}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{R\Phi}{r^2 \sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{R\Theta}{r^2 \sin^2\theta} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = 0$$

用  $\frac{r^2}{R\Theta\Phi}$  遍乘各项并移项整理，即得

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) = \frac{-1}{\Theta \sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \frac{1}{\Phi \sin^2\theta} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}$$

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

引入参数 $n(n+1)$  分解整理得

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - n(n+1)R = 0$$

欧拉型方程

$$\frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Phi \sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + n(n+1) = 0$$

球函数方程

欧拉方程通解

$$R(r) = A_1 r^n + A_2 r^{-(n+1)}$$

$A_1, A_2$  为任意常数。

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

求函数方程两端同时乘以  $\sin^2 \theta$  并移项得

$$\frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + n(n+1) \sin^2 \theta = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2}$$

引入参数  $\lambda$  分解可得两个常微分方程

$$\Phi'' + \lambda \Phi = 0$$

$$\sin \theta \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + [n(n+1) \sin^2 \theta - \lambda] \Theta = 0$$

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

第一个方程与自然周期条件  $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$  结合，构成本征值问题

$$\begin{cases} \Phi'' + \lambda\Phi = 0 \\ \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi) \end{cases}$$

解之可确定本征值  $\lambda = m^2$ ,  $m = 0, 1, \dots$  和相应的本征函数

$$\Phi(\varphi) = A \cos m\varphi + B \sin m\varphi$$

第二个方程为

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \cot\theta \frac{d\Theta}{d\theta} + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right] \Theta = 0$$

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

令  $x = \cos \theta$ ，并记  $P(x) = \Theta(\cos \theta)$

$$(1-x^2)\frac{d^2P}{dx^2} - 2x\frac{dP}{dx} + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P = 0$$

连带的勒让德方程

$m=0$ 时

$$(1-x^2)\frac{d^2P}{dx^2} - 2x\frac{dP}{dx} + n(n+1)P = 0$$

勒让德方程

# ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

## 3.4 勒让德方程的求解

考虑勒让德方程

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0$$

令

$$y(x) = x^c (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k + \cdots)$$

将其代入勒让德方程，得

$$-\sum_{k=0}^{\infty} [(k+c)(k+c+1) - n(n+1)] a_k x^{k+c} + \sum_{k=0}^{\infty} (k+c)(k+c-1) a_k x^{k+c-2} = 0$$

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

$$c(c-1)a_0x^{c-2} + c(c+1)a_1x^{c-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \{[(k+c+2)(k+c+1)a_{k+2} - [(k+c)(k+c+1) - n(n+1)]a_k]\}x^{k+c} = 0$$

$$c(c-1)a_0 = 0$$

$$c(c+1)a_1 = 0$$

$$(k+c+2)(k+c+1)a_{k+2} - [(k+c)(k+c+1) - n(n+1)]a_k = 0$$

比较可得

$$\begin{aligned} \Rightarrow c=0 \text{ 或 } =1 \\ \Rightarrow c=0 \text{ 或 } =-1 \end{aligned} \Rightarrow a_{k+2} = \frac{(k+c)(k+c+1) - n(n+1)}{(k+c+1)(k+c+2)} a_k$$

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

$$c=0 \text{ 时} \quad \text{递推公式} \quad a_{k+2} = \frac{(k-n)(k+n-1)}{(k+2) \cdot (k+1)} a_k$$

依此可得

$$a_2 = \frac{-l(l+1)}{2!} a_0 \quad a_4 = \frac{(2-l)(l+3)}{4 \cdot 3} a_2 = \frac{(2-l)(-l)(l+1)(l+3)}{4!} a_0$$

$$a_{2k} = \frac{(2k-2-l)(2k-4-l) \cdots (-l)(l+1) \cdots (l+2k-1)}{(2k)!} a_0$$

$$a_3 = \frac{(1-l)(l+2)}{3!} a_1$$

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

$$a_5 = \frac{(3-l)(l+4)}{5 \cdot 4} a_3 = \frac{(3-l)(1-l)(l+2)(l+4)}{5!} a_1$$

$$a_{2k+1} = \frac{(2k-1-l)(2k-3-l)\cdots(1-l)(l+2)\cdots(l+2k)}{(2k+1)!} a_1$$

$$y(x) = a_1 y_1(x) + a_2 y_2(x)$$

其中

$$y_1 = 1 - \frac{n(n+1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!} x^4 + \cdots + \frac{(2k-2-n)(2k-4-n)\cdots(-n)(n+1)\cdots(n+2k-1)}{(2k)!} x^{2k}$$

$$y_2 = x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!} x^3 + \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!} x^5 + \cdots + \frac{(2k-1-n)(2k-3-n)\cdots(1-n)(n+2)\cdots(n+2k)}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

### 3.5 勒让德多项式

将3.4中的递推公式写成 
$$a_k = -\frac{(k+2) \cdot (k+1)}{(n-k)(k+n+1)} a_{k+2}$$

可以将其它系数一一推算出来，即

$$a_{n-2} = \frac{-n(n-1)}{2(2n-1)} a_n$$

$$a_{n-4} = \frac{(n-2)(n-3)}{-4(2n-3)} a_{n-2} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)} a_n$$

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

为了使这些表达式能够写成比较简洁的形式, 并且使所得的多项式在 $x=1$ 处取的值等于1, 取 $a_n$ 为

$$a_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{n!} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

有

$$a_{n-2} = \frac{(2n-2)!}{2^n (n-1)!(n-2)!}$$

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

$$a_{n-4} = \frac{(2n-4)!}{2!2^n(n-2)!(n-4)!}$$

一般地当  $n-2k \geq 0$  时，有

$$a_{n-2k} = (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{k!2^n(n-k)!(n-2k)!}$$

当  $n$  为正偶数时，将这些系数代入到  $y_1(x)$  中得到

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} x^n - \frac{(2n-2)!}{2^n(n-1)!(n-2)!} x^{n-2} + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k} \end{aligned}$$

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

$n$ 为正奇数时，将这些系数代入到  $y_2(x)$  中得到

$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}$$

这两个多项式可以统一写成

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

**$n$  阶勒让德多项式**

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

$$P_l(x) = \sum \frac{(-1)^k (2l - 2k)!}{2^l k!(l - k)!(l - 2k)!} x^{l-2k} = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$$

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x = \cos \theta$$

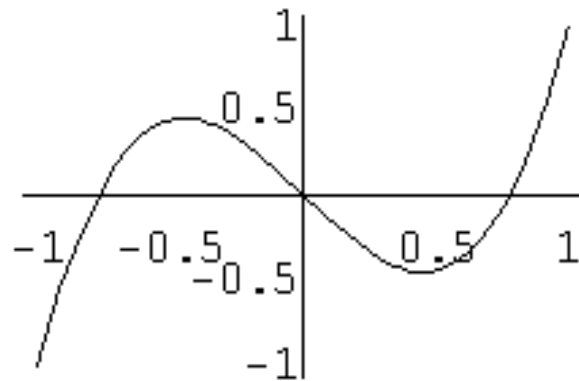
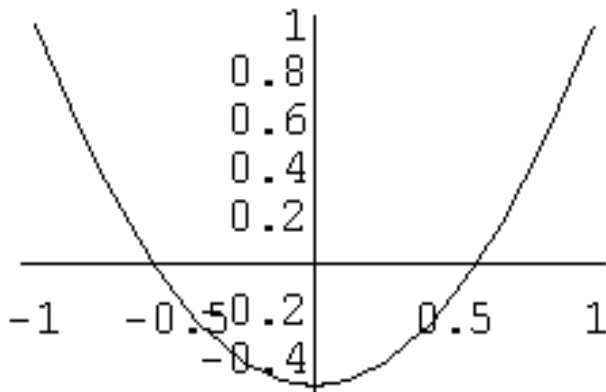
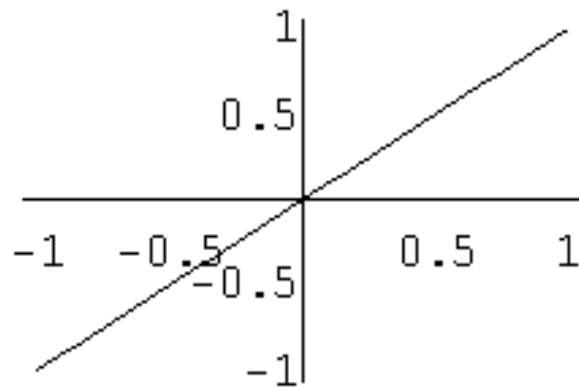
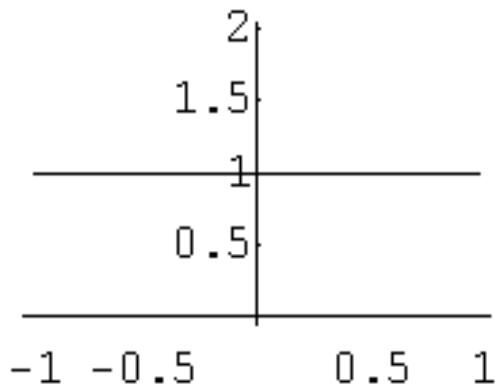
$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) = \frac{1}{4}(3\cos 2\theta + 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) = \frac{1}{8}(5\cos 3\theta + 3\cos \theta)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) = \frac{1}{64}(35\cos 4\theta + 20\cos 2\theta + 9)$$

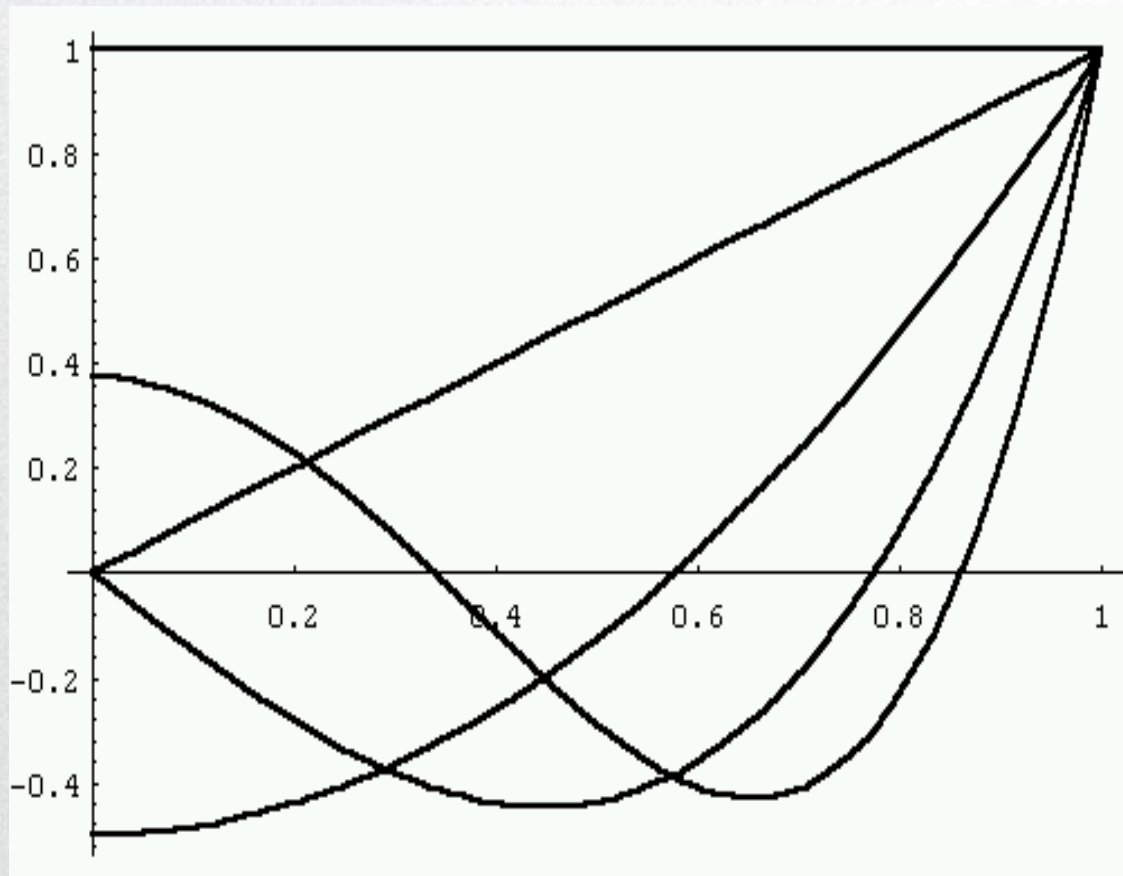
# ● 数理方程：第三章：特殊函数

## ◆ 图象



# ● 数理方程：第三章：特殊函数

## ◆ 图象



## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

勒让德多项式的微分表达式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

多项式的Rodrigues表达式

当为整数时,取  $a_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$  时,  $y_1(x), y_2(x)$  中总有一个是勒让德多项式, 在  $[-1, 1]$  上有界, 这时另一个函数仍是无穷级数, 记作  $Q_l(x)$

此时Legendre方程的通解为

$$y(x) = C_1 P_l(x) + C_2 Q_l(x)$$

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

$$y(x) = C_1 P_l(x) + C_2 Q_l(x)$$

$Q_l(x)$  称为第二类Legendre函数，它在 $[-1, 1]$ 上仍是无界的。

$$\lim_{|x| \rightarrow 1} |Q_l(x)| = \infty$$

故必须取常数  $C_2 = 0$  从而勒让德方程的解就只有

第一类勒让德函数即勒让德多项式：

★ 注：法国数学家勒让德（A.M.Legendre 1725~1833）最早专门研究过在球坐标系中求解数学物理方程问题时所遇到的一类特殊函数。由于这类函数具有多项式形式，所以命名这类函数为勒让德函数。

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

综合可得如下结论：

(1) 当  $l$  不是整数时，勒让德方程在区间  $[-1,1]$  上无有界的解。

(2) 当  $l = n$  为整数时，勒让德方程的通解为

$$y(x) = c_1 P_n(x) + c_2 Q_n(x)$$

其中  $P_n(x)$  称为第一类勒让德函数（即勒让德多项式），

$Q_n(x)$  称为第二类勒让德函数。

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---



$l = n$  为整数，且要求在自然边界条件下(即要求在  
有界解的情况下)求解，则勒让德方程的解只有第一类勒让德函数即  
勒让德多项式  $P_n(x)$ 。因为第二类勒让德函数  $Q_n(x)$  在闭区间  
[-1,1] 上是无界的。

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

### 3.6 勒让德多项式的生成函数（母函数）

$$u(x, r) = \sum_0^{\infty} P_l(x) r^l$$

则称 $u(x, r)$ 为勒让德多项式的生成函数（母函数）

$$\frac{1}{\sqrt{1-2rx+r^2}} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} r^n P_n(x) & (r \leq 1) \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} P_n(x) & (r > 1) \end{cases} \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-2rx+r^2}}$$

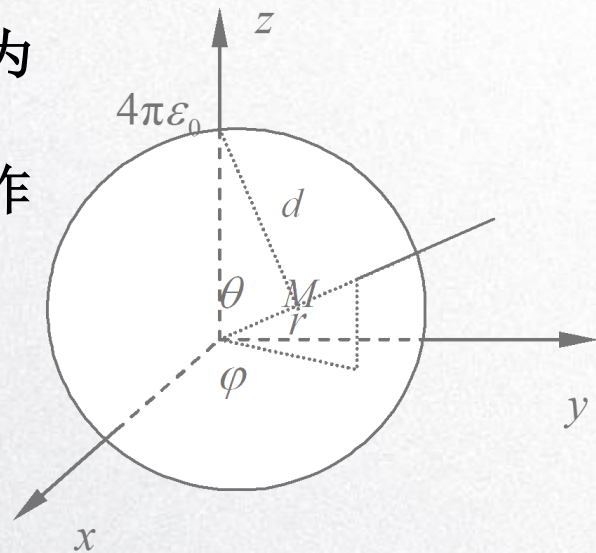
叫作勒让德多项式的生成函数（或母函数）

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

如图所示，设在一个单位球的北极放置一带电量为  $4\pi\varepsilon_0$  的正电荷，则在球内任一点  $M$  (其球坐标记作  $r, \theta, \varphi$ ) 的静电势为

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2r \cos\theta + r^2}} \quad (3.6.1)$$



静电势  $\frac{1}{d}$  遵从拉普拉斯方程，且以球坐标系的极轴为对称轴，因此， $\frac{1}{d}$  应具有轴对称情况下拉普拉斯方程一般解的形式，

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

即

$$\frac{1}{d} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( C_n r^n + D_n \frac{1}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta) \quad (3.6.2)$$

首先不妨研究单位球内的静电势分布。在球心 ( $r = 0$ )，电势应该是有限的，

故必须取  $D_l = 0$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2r \cos \theta + r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} C_n r^n P_n(\cos \theta) \quad (r < 1) \quad (3.6.3)$$

为确定系数  $C_n$ ，在上式中令  $\theta = 0$ ，并注意到  $P_n(1) = 1$

则得到

$$\frac{1}{1-r} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n r^n P_n(1) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n r^n \quad (r < 1) \quad (3.6.4)$$

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

将上式左边在  $r = 0$  的邻域上展为泰勒级数

$$\frac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^l + \cdots \quad (r < 1) \quad (3.6.5)$$

比较 (3.6.4) 和 (3.6.5) 即知  $C_n = 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$

于是 (3.6.3) 成为

$$\frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n P_n(\cos\theta) \quad (r < 1) \quad (3.6.6)$$

若考虑单位球内、球外的静电势分布，则有

$$\frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} r^n P_n(\cos\theta) & (r \leq 1) \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta) & (r > 1) \end{cases} \quad (3.6.7)$$

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

代入  $x = \cos \theta$ ，即为

$$\frac{1}{\sqrt{1-2rx+r^2}} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} r^n P_n(x) & (r \leq 1) \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} P_n(x) & (r > 1) \end{cases} \quad (-1 \leq x \leq 1) \quad (3.6.8)$$

因此  $\frac{1}{\sqrt{1-2r \cos \theta + r^2}}$  或  $\frac{1}{\sqrt{1-2rx+r^2}}$

叫作勒让德多项式的生成函数（或母函数）

# ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

## 3.7 函数展开成 勒让德多项式的级数

### 1 勒让德多项式的正交性

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{2}{2n+1}, & m = n \end{cases}$$

$$N = \sqrt{\int_{-1}^1 P_n^2(x)dx} = \sqrt{\frac{2}{2n+1}} \text{ 称为勒让德多项式的模值。}$$

$\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  是一个正交的函数系。

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

**展开定理** 设 $f(x)$ 为 $[-1, 1]$ 上具有一阶连续导数及分段连续的二阶导数，

且 $f(-1) = -1, f(1) = 1$ ，则 $f(x)$ 可展开成

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x)$$

其中

$$C_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

上式称为 $f(x)$ 的傅立叶-勒让德级数，简称F-L级数。

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

**例1** 将函数 $f(x) = |x|$ 在区间 $(-1, 1)$ 内展成勒让德多项式的级数。

**解** 因 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 内是偶函数，而 $P_{2n+1}(x)$ 是 $x$ 的奇函数，故

$$C_{2n+1} = 0, (n = 0, 1, 2, \dots)$$

下面计算  $C_{2n} = 0, (n = 0, 1, 2, \dots)$

$$C_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 -x dx + \frac{1}{2} \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

$$\begin{aligned}C_{2n} &= \frac{4n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_{2n}(x) dx \\&= \frac{4n+1}{2} \left( \int_{-1}^0 -x P_{2n}(x) dx + \int_0^1 x P_{2n}(x) dx \right) \\&= \frac{4n+1}{2} \left( \int_{-1}^0 -x \frac{1}{2^{2n}(2n)!} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} (x^2-1)^{2n} dx + \int_0^1 x \frac{1}{2^{2n}(2n)!} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} (x^2-1)^{2n} dx \right) \\&= (-1)^{n+1} \frac{(4n+1)(2n-2)!}{2^{2n}(n-1)!(n+1)!}\end{aligned}$$

从而

$$|x| = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (4n+1)(2n-2)!}{2^{2n}(n-1)!(n+1)!} P_{2n}(x)$$

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

例 2 求证勒让德多项式的递推公式

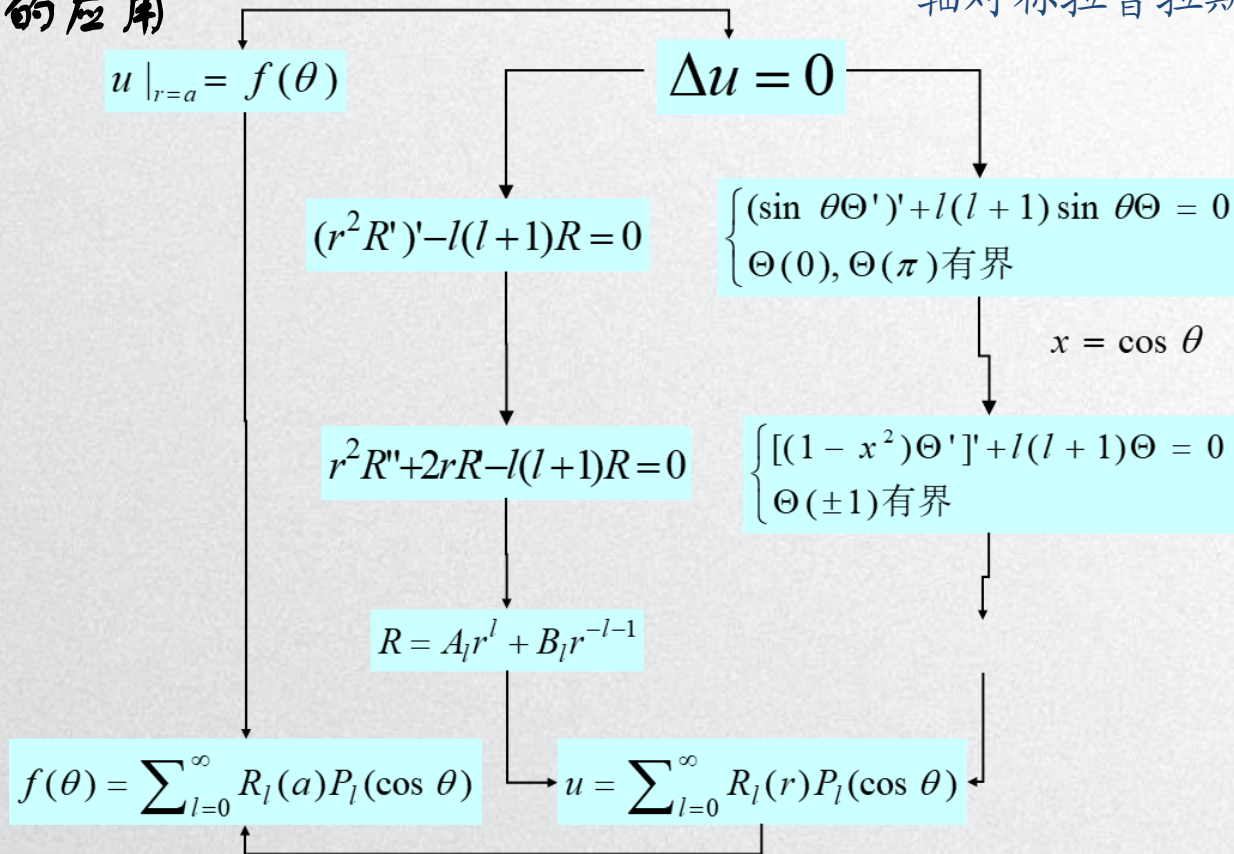
$$(n+1)P_{n+1} = (2n+1)xP_n - nP_{n-1}$$

当  $P_0, P_1$  已知时，反复利用上式可以推出任意阶勒让德多项式的表达式。

# ● 数理方程：第三章：特殊函数

勒让德多项式的应用

轴对称拉普拉斯方程的求解



## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

### 例3 球形域内的电位分布

在半径为1的球内求调和函数 $u$ ，使其在球面上满足  $u|_{r=1} = \cos^2 \theta$

解：在球面坐标系  $\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$

由于边界条件不依赖于  $\varphi$ ，所以 $u$ 也不依赖于  $\varphi$

所提问题可化为下列边值问题

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = 0, & 0 < r < 1, 0 \leq \theta \leq \pi \\ u|_{r=1} = \cos^2 \theta \end{cases}$$

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

用分离变量法求解，令  $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$

代入方程得

$$(r^2 R'' + 2rR')\Theta + (\Theta'' + \cot\theta \Theta')R = 0$$

化简并引入参数  $\lambda$

$$\frac{r^2 R'' + 2rR'}{R} = -\frac{\Theta'' + \operatorname{ctg}\theta \Theta'}{\Theta} = \lambda$$

分解得到两个常微分方程

$$r^2 R'' + 2rR' - \lambda R = 0$$

$$\Theta'' + \cot\theta \Theta' + \lambda\Theta = 0$$

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

在第二个方程中，令

$$\lambda = n(n+1), \quad x = \cos \theta, \quad \Theta(\arccos x) = P(x)$$

则有

$$(1-x^2) \frac{d^2 P}{dx^2} - 2x \frac{dP}{dx} + n(n+1)P = 0$$

勒让德方程

为保证函数  $u$  的有界性  $n$  只能取为整数，此时  $P(x) = C_n P_n(x)$

是方程在自然边界条件  $|P(\pm 1)| < +\infty$  下的特征函数系。

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

$R$ 的方程  $r^2 R'' + 2rR' - n(n+1)R = 0$  的通解为

$$R_n(r) = A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}$$

当  $r \rightarrow 0, |R_n|$  应保持有界, 故  $B_n = 0$ , 即

$$R_l(r) = A_l r^l$$

利用叠加原理, 原问题的解可以表示为

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n r^n P_n(\cos \theta)$$

$C_n$  为待定系数, 需由边界条件确定, 代入边界条件

$$\cos^2 \theta = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\cos \theta)$$

## ● 数理方程：第三章：特殊函数

---

用 $x$ 代替  $\cos \theta$

$$x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x)$$

由

$$x^2 = \frac{1}{3} P_0(x) + \frac{2}{3} P_2(x)$$

比较系数可得  $C_0 = \frac{1}{3}, C_2 = \frac{2}{3}, C_l = 0 (l \neq 0)$

因此所求定解问题的解为

$$u(r, \theta) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} P_2(\cos \theta) r^2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left( \cos^2 \theta - \frac{1}{3} \right) r^2$$

The background features a collection of circles in two colors: dark blue and white. The circles vary in size and are scattered across the light gray background. Some circles have a slight shadow, giving them a 3D appearance. The largest white circle is positioned in the upper left quadrant and contains the word "THANKS" in red, bold, uppercase letters.

**THANKS**

Q & A ?