工程数学

25-26年度第二学期

网络授课

课程号：00330760 工能必修+航材生限选+双培

2026.05

第二章 分离变量法

2.1 齐次方程的分离变数法

（一）、分离变数法

考虑定解问题：　泛定方程　$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$

边界条件 $\begin{cases} u(x,t)\big|_{x=0} = 0 \\ u(x,t)\big|_{x=l} = 0 \end{cases}$　弦两端固定

初始条件 $\begin{cases} u(x,t)\big|_{t=0} = \varphi(x) & (0 < x < l) \\ u_t(x,t)\big|_{t=0} = \psi(x) & (0 < x < l) \end{cases}$

数理方程：第二章：分离变量法

弦两端固定，之间形成驻波（回顾 $y = 2A\cos kx\cos\omega t$）

驻波的一般式 $u(x,t) = X(x)T(t)$ 分离变量

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$$

边界条件
$$\begin{cases} u(x,t)\big|_{x=0} = 0 \\ u(x,t)\big|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

代入泛定方程 $X(x)T''(t) - a^2 X''(x)T(t) = 0$

数理方程：第二章：分离变量法

代入边界条件 $\begin{cases} X(0)T(t)=0 \\ X(l)T(t)=0 \end{cases}$ ⇒ $\begin{cases} X(0)=0 \\ X(l)=0 \end{cases}$

和 $$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}$$ 与 x 和 t 无关

令 $=-\lambda$

边界条件有 $\begin{cases} X(0)=0 \\ X(l)=0 \end{cases}$

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$$

数理方程：第二章：分离变量法

$$T''(t)+\lambda a^2 T(t)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=0 \qquad X(l)=0 \end{cases}$$

以下求X

$$X=C_1 e^{\sqrt{-\lambda}\,x}+C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\,x}$$

（1）、λ < 0

而由边界条件 $C_1+C_2=0 \qquad C_1 e^{\sqrt{-\lambda}\,l}+C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\,l}=0$

（1）、λ < 0

$$X = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}\,x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\,x}$$

$$C_1 + C_2 = 0 \qquad C_1 e^{\sqrt{-\lambda}\,l} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\,l} = 0$$

⇒ $C_1 = 0$ $\quad C_2 = 0$ ⇒ $X = 0$ ⇒ $u(x,t) = 0$

故 λ < 0 不可能

（2）、λ = 0 $\quad X'' + \lambda X = 0 \qquad X'' = 0$

$$X = C_1 x + C_2$$

而由边界条件 $C_2 = 0 \qquad C_1 l + C_2 = 0$

⇒ $C_1 = 0 \quad C_2 = 0 \quad u(x,t) = 0$ 故 λ=0 不可能

数理方程：第二章：分离变量法

（3）、λ > 0

$$X''+\lambda X=0 \qquad X=C_1\cos\sqrt{\lambda}\,x+C_2\sin\sqrt{\lambda}\,x$$

而由边界条件 $\begin{cases} C_1=0 \\ C_2\sin\sqrt{\lambda}\,l=0 \end{cases}$

因为 $C_2\neq 0$ 所以 $\sin\sqrt{\lambda}\,l=0$

$\Rightarrow$ $\sqrt{\lambda}\,l=n\pi$ $\Rightarrow$ $\lambda=\dfrac{n^2\pi^2}{l^2}$ 有 $\boxed{X=C_2\sin\dfrac{n\pi}{l}x}$

$$\lambda = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$$ 称为本征值

$$X = C_2 \sin\frac{n\pi}{l}x$$ 是Furier级数的基本函数族

由T满足的方程 $T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$ $\quad T''(t) + \frac{n^2\pi^2 a^2}{l^2}T(t) = 0$

$$\Rightarrow \quad T = A\cos\frac{n\pi at}{l} + B\sin\frac{n\pi at}{l}$$

分离变数的解 $u_n(x,t) = (A_n\cos\frac{n\pi at}{l} + B_n\sin\frac{n\pi at}{l})\sin\frac{n\pi}{l}x$

数理方程：第二章：分离变量法

$$u_n(x,t)=(A_n\cos\frac{n\pi at}{l}+B_n\sin\frac{n\pi at}{l})\sin\frac{n\pi}{l}x$$ 称为本征振动

本征振动的角频率为 $\omega_n=\frac{n\pi a}{l}$ 频率为 $f_n=\frac{na}{2l}$

当 n =1，称为基波； $\omega=\frac{\pi a}{l}$ $f=\frac{a}{2l}$

当 n >1，称为 n 阶谐波

本征振动的线性叠加仍满足泛定方程和边界条件，故为一般解

数理方程：第二章：分离变量法

$$u_n(x,t)=(A_n\cos\frac{n\pi at}{l}+B_n\sin\frac{n\pi at}{l})\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$u=\sum_n u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos\frac{n\pi at}{l}+B_n\sin\frac{n\pi at}{l})\sin\frac{n\pi}{l}x$$

初始条件
$$\begin{cases} u(x,t)\big|_{t=0}=\varphi(x) & (0<x<l) \\ u_t(x,t)\big|_{t=0}=\psi(x) & (0<x<l) \end{cases}$$

$\mathbf{A_n}$ 和 $\mathbf{B_n}$ 由初始条件确定

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi}{l}x=\varphi(x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x=\psi(x)$$

数理方程：第二章：分离变量法

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{l}x = \varphi(x) \\ \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x = \psi(x) \end{cases} \quad (0<x<l)$$

初始条件

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^l A_n \sin\frac{n\pi\xi}{l}\ \sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi = \int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi$$

$$A_k\frac{l}{2} = \int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi \Rightarrow \boxed{A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi}$$

数理方程：第二章：分离变量法

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x = \psi(x)$$

初始条件

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^l B_n \frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi\xi}{l}\ \sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi = \int_0^l \psi(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi$$

$$B_k\frac{k\pi\xi}{l}\frac{l}{2} = \int_0^l \psi(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi \Rightarrow B_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l \psi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi$$

称为本征振动

$$u=\sum_n u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi at}{l}+B_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

系数 $A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi$ $\quad B_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l\psi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi$

解题过程：

泛定方程 ➡ 分离变数 ➡ 边界条件得本征值

➡ 得X和T ➡ 本征振动 ➡ 初始条件得本征振动系数

（二）、例题

例：两端自由振动的自由杆定解问题：

泛定方程 $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$

边界条件 $\begin{cases} u_x(x,t)\big|_{x=0} = 0 \\ u_x(x,t)\big|_{x=l} = 0 \end{cases}$ 弦两端自由

初始条件 $\begin{cases} u(x,t)\big|_{t=0} = \varphi(x) & (0 < x < l) \\ u_t(x,t)\big|_{t=0} = \psi(x) & (0 < x < l) \end{cases}$

驻波的一般式 $u(x,t) = X(x)T(t)$ 分离变量

数理方程：第二章：分离变量法

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$$

边界条件 $\begin{cases} u_x(x,t)\big|_{x=0} = 0 \\ u_x(x,t)\big|_{x=l} = 0 \end{cases}$

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

代入泛定方程 $X(x)T''(t) - a^2 X''(x)T(t) = 0$

代入边界条件 $\begin{cases} X'(0)T(t) = 0 \\ X'(l)T(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X'(0) = 0 \\ X'(l) = 0 \end{cases}$

数理方程：第二章：分离变量法

和 $$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}$$ 与x和 t 无关

令

$$=-\lambda$$

边界条件有 $$\begin{cases} X'(0)=0 \\ X'(l)=0 \end{cases}$$ $$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$$

$$T''(t)+\lambda a^2T(t)=0$$

➡ $$\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X'(0)=0 \qquad X'(l)=0 \end{cases}$$

数理方程：第二章：分离变量法

以下求X

（1）、λ < 0　　仅得无意义的解　$X \equiv 0$

（2）、λ = 0

$$X''+\lambda X=0$$

$$X=C_0+D_0x$$

$$X'=0 \Rightarrow D_0=0 \quad C_0\text{任意}$$

$$T''(t)+\lambda a^2T(t)=0 \Rightarrow T''(t)=0$$

$$T''(t)=0$$

$$T_0(t)=A_0+B_0t \qquad u_0(x,t)=A_0+B_0t$$

（3）、λ > 0

$$X''+\lambda X=0 \qquad X=C_1\cos\sqrt{\lambda}\,x+C_2\sin\sqrt{\lambda}\,x$$

而由边界条件 $\begin{cases}\sqrt{\lambda}\,C_2=0\\ \sqrt{\lambda}\,(-C_1\sin\sqrt{\lambda}\,l+C_2\cos\sqrt{\lambda}\,l)=0\end{cases}$

$C_2=0$ 因为 $C_1\neq 0$ 所以 $\sin\sqrt{\lambda}\,l=0$

⇒ $\sqrt{\lambda}\,l=n\pi$

⇒ $\lambda=\dfrac{n^2\pi^2}{l^2}$ 有

$$\boxed{X=C_1\cos\frac{n\pi}{l}x}$$

数理方程：第二章：分离变量法

$$\lambda = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$$ 称为本征值

$$X = C_1 \cos\frac{n\pi}{l}x$$ 是Furier级数的基本函数族

由T满足的方程 $T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$ $\quad T''(t) + \frac{n^2\pi^2 a^2}{l^2} T(t) = 0$

$$\Rightarrow \quad T = A\cos\frac{n\pi at}{l} + B\sin\frac{n\pi at}{l}$$

分离变数的解 $u_n(x,t) = (A_n \cos\frac{n\pi at}{l} + B_n \sin\frac{n\pi at}{l})\cos\frac{n\pi}{l}x$

数理方程：第二章：分离变量法

$$u_0(x,t) = A_0 + B_0 t$$

$$u_n(x,t) = (A_n \cos\frac{n\pi at}{l} + B_n \sin\frac{n\pi at}{l})\cos\frac{n\pi}{l}x$$

所有本征振动的叠加为

$$u = A_0 + B_0 t + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos\frac{n\pi at}{l} + B_n \sin\frac{n\pi at}{l})\cos\frac{n\pi}{l}x$$

初始条件 $$\begin{cases} u(x,t)\big|_{t=0} = \varphi(x) & (0 < x < l) \\ u_t(x,t)\big|_{t=0} = \psi(x) & (0 < x < l) \end{cases}$$

数理方程：第二章：分离变量法

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi}{l}x = \varphi(x)$$

$$B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi a}{l}\cos\frac{n\pi}{l}x = \psi(x)$$

$$\begin{cases} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi}{l}x = \varphi(x) \\ B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi a}{l}\cos\frac{n\pi}{l}x = \psi(x) \end{cases} \quad (0 < x < l)$$

初始条件

数理方程：第二章：分离变量法

$$\int_0^l A_0 \cos\frac{k\pi\xi}{l}d\xi + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^l A_n \cos\frac{n\pi\xi}{l}\ \cos\frac{k\pi\xi}{l}d\xi$$

$$= \int_0^l \varphi(\xi)\cos\frac{k\pi\xi}{l}d\xi$$

$\Rightarrow$ $k = n$

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\cos\frac{n\pi\xi}{l}d\xi$$

$$\int_0^l A_0 \cos\frac{k\pi\xi}{l}d\xi + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^l A_n \cos\frac{n\pi\xi}{l}\ \cos\frac{k\pi\xi}{l}d\xi = \int_0^l \phi(\xi)\cos\frac{k\pi\xi}{l}d\xi$$

数理方程：第二章：分离变量法

$\Rightarrow$ $k=0$

$$A_0=\frac{1}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\,d\xi$$

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\cos\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi$$

$$B_0+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{n\pi a}{l}\cos\frac{n\pi}{l}x=\psi(x)$$

$$\int_0^l B_0\cos\frac{k\pi\xi}{l}\,d\xi+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^l B_n\frac{n\pi a}{l}\cos\frac{n\pi\xi}{l}\cos\frac{k\pi\xi}{l}\,d\xi$$

$$=\int_0^l \psi(\xi)\cos\frac{k\pi\xi}{l}\,d\xi$$

$$\Rightarrow \quad k = n \qquad B_k \frac{k\pi\xi}{l}\frac{l}{2} = \int_0^l \psi(\xi)\cos\frac{k\pi\xi}{l}d\xi$$

$$\boxed{B_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l \psi(\xi)\cos\frac{n\pi\xi}{l}d\xi}$$

$$\int_0^l B_0\cos\frac{k\pi\xi}{l}d\xi + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^l B_n\frac{n\pi a}{l}\cos\frac{n\pi\xi}{l}\cos\frac{k\pi\xi}{l}d\xi$$

$$= \int_0^l \psi(\xi)\cos\frac{k\pi\xi}{l}d\xi$$

数理方程：第二章：分离变量法

$k=0$ $$B_k l=\int_0^l \psi(\xi)\,d\xi$$

$$B_0=\frac{1}{l}\int_0^l \psi(\xi)\,d\xi \qquad B_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l \psi(\xi)\cos\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi$$

本征振动 $$u=A_0+B_0 t+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi at}{l}+B_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\cos\frac{n\pi}{l}x$$

系数

$$A_0=\frac{1}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\,d\xi \qquad A_n=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\cos\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi$$

$$B_0=\frac{1}{l}\int_0^l \psi(\xi)\,d\xi \qquad B_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l \psi(\xi)\cos\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi$$

数理方程：第二章：分离变量法

例：细杆热传导问题，初始一端温度为0，另一端为 u_0，零的一端温度保持不变，另一端与外界绝热。求细杆温度

泛定方程 $u_t - a^2 u_{xx} = 0$

边界条件 $\begin{cases} u\big|_{x=0} = 0 \\ u_x\big|_{x=l} = 0 \end{cases}$ 初始条件 $u\big|_{t=0} = u_0 x / l$

驻波的一般式 $u(x,t) = X(x)T(t)$ 分离变量

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0$$

边界条件 $\begin{cases} u\big|_{x=0} = 0 \\ u_x\big|_{x=l} = 0 \end{cases}$

数理方程：第二章：分离变量法

$$u(x,t)=X(x)T(t)$$

代入泛定方程 $X(x)T'(t)-a^2X''(x)T(t)=0$

代入边界条件 $\begin{cases} X(0)T(t)=0 \\ X'(l)T(t)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(0)=0 \\ X'(l)=0 \end{cases}$

和 $$\frac{T'(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}$$ 与 x 和 t 无关

令 $$=-\lambda$$

$$\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=0 \qquad X'(l)=0 \end{cases} \qquad T'(t)+\lambda a^2T(t)=0$$

数理方程：第二章：分离变量法

以下求X

（1）、λ < 0， λ = 0

仅得无意义的解 $X \equiv 0$

（2）、λ > 0

$$X''+\lambda X = 0$$

$$X = C_1 \cos\sqrt{\lambda}\, x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\, x$$

而由边界条件

$$X(0) = 0 \quad X'(l) = 0$$

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ \sqrt{\lambda}\,(-C_1 \sin\sqrt{\lambda}\, l + C_2 \cos\sqrt{\lambda}\, l) = 0 \end{cases}$$

数理方程：第二章：分离变量法

因为 $C_2 \neq 0$ 所以 $\cos\sqrt{\lambda}\, l = 0$

$$\Rightarrow \sqrt{\lambda}\, l = (k + \frac{1}{2})\pi \qquad k = 0,1,2,\cdots$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{(2k+1)^2\pi^2}{4l^2}$$

有

$$\boxed{X = C_2 \sin\frac{(2k+1)\pi}{2l}x}$$

$$\lambda = \frac{(2k+1)^2\pi^2}{4l^2}$$

为本征值

$$X = C_2 \sin\frac{(2k+1)\pi}{2l}x$$

数理方程：第二章：分离变量法

$$T'(t)+\lambda a^2 T(t)=0$$

由T满足的方程

$$T'(t)+\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2}{4l^2}T(t)=0$$

$\Rightarrow$

$$T=C\,e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2}{4l^2}t}$$

分离变数的解 $u_k=C_k\,e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2}{4l^2}t}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}$

$$u=\sum_{k=1}^{\infty}C_k\,e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2}{4l^2}t}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}$$

C_k 由初始条件定

初始条件 $u\big|_{t=0} = u_0 x / l$

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l} = u_0 x / l$$

$$\Rightarrow \quad C_k = \frac{2}{l}\int_0^l \frac{u_0 \xi}{l} \sin\frac{(2k+1)\pi \xi}{2l} d\xi$$

$$C_k = \frac{2}{l}\int_0^l \frac{u_0 \xi}{l} \sin\frac{(2k+1)\pi \xi}{2l} d\xi = (-1)^k \frac{2u_0}{(k+\frac{1}{2})^2 \pi^2}$$

数理方程：第二章：分离变量法

$$u=\sum_{k=1}^{\infty}C_k e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2}{4l^2}t}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}$$

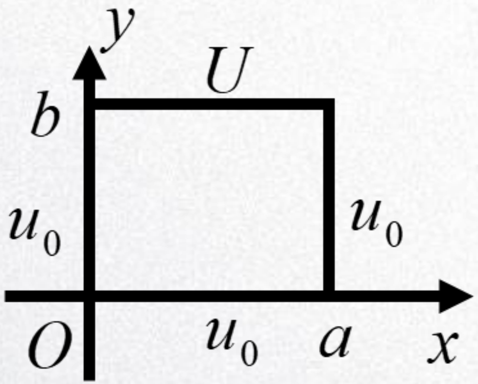
$$=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2u_0}{(k+\frac{1}{2})^2\pi^2}e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2}{4l^2}t}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}$$

例：矩形薄板的稳定温度分布问题，边界条件如图所示。

泛定方程 $u_{xx}+u_{yy}=0$

边界条件 $\begin{cases} u\big|_{x=0}=u_0 \\ u\big|_{x=a}=u_0 \end{cases}$ $(0<y<b)$

$\begin{cases} u\big|_{y=0}=u_0 \\ u\big|_{y=a}=U \end{cases}$ $(0<x<a)$



非齐次边界条件，化简 $u=v+u_0$

分离变量

$$u(x,t)=X(x)T(t)$$

数理方程：第二章：分离变量法

泛定方程 $u_{xx}+u_{yy}=0$

边界条件 $\begin{cases} u|_{x=0}=u_0 \\ u|_{x=a}=u_0 \end{cases} (0<y<b)$ $\begin{cases} u|_{y=0}=u_0 \\ u|_{y=a}=U \end{cases} (0<x<a)$

$$u=v+u_0$$

泛定方程 $v_{xx}+v_{yy}=0$

边界条件 $\begin{cases} v|_{x=0}=0 \\ v|_{x=a}=0 \end{cases} (0<y<b)$ $\begin{cases} v|_{y=0}=0 \\ v|_{y=a}=U-u_0 \end{cases} (0<x<a)$

分离变量 $v(x,y)=X(x)Y(y)$

数理方程：第二章：分离变量法

$$\frac{X''(t)}{X(t)} = -\frac{Y''(x)}{Y(x)} = -\lambda$$

边界条件 $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = 0 \qquad X(a) = 0 \end{cases}$ ⇒ $Y''(y) - \lambda Y(y) = 0$

有 $\lambda = \dfrac{n^2\pi^2}{a^2}$ 和 $\boxed{X = C\sin\dfrac{n\pi}{a}x}$

$Y = Ae^{\sqrt{\lambda}\,y} + Be^{-\sqrt{\lambda}\,y}$ 以及 $\boxed{Y = Ae^{\frac{n\pi y}{a}} + Be^{-\frac{n\pi y}{a}}}$

数理方程：第二章：分离变量法

$$X = C\sin\frac{n\pi}{a}x \qquad Y = Ae^{\frac{n\pi y}{a}} + Be^{-\frac{n\pi y}{a}}$$

所有本征振动的叠加为 $$v = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n e^{\frac{n\pi y}{a}} + B_n e^{-\frac{n\pi y}{a}}\right)\sin\frac{n\pi}{a}x$$

边界条件 $$v\big|_{y=0} = 0 \qquad v\big|_{y=a} = U - u_0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty}(A_n + B_n)\sin\frac{n\pi}{a}x = 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n e^{\frac{nb\pi}{a}} + B_n e^{-\frac{nb\pi}{a}}\right)\sin\frac{n\pi}{a}x = U - u_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases}\sum_{n=1}^{\infty}(A_n+B_n)\sin\frac{n\pi}{a}x=0\\ \sum_{n=1}^{\infty}(A_ne^{\frac{nb\pi}{a}}+B_ne^{-\frac{nb\pi}{a}})\sin\frac{n\pi}{a}x=U-u_0\end{cases}$$

故 $$\begin{cases}A_n+B_n=0\\ A_ne^{\frac{nb\pi}{a}}+B_ne^{-\frac{nb\pi}{a}}=\frac{2}{a}\int_0^a(U-u_0)\sin\frac{n\pi\xi}{a}d\xi\end{cases}$$

$$=-\frac{2(U-u_0)}{n\pi}\cos\frac{n\pi\xi}{a}\Big|_0^a=\frac{2(U-u_0)}{n\pi}(1-\cos n\pi)$$

数理方程：第二章：分离变量法

故
$$\begin{cases} A_n + B_n = 0 \\ A_n e^{\frac{nb\pi}{a}} + B_n e^{-\frac{nb\pi}{a}} = \dfrac{2(U-u_0)}{n\pi}(1-\cos n\pi) = \dfrac{2(U-u_0)}{n\pi}[1-(-1)^n] \end{cases}$$

$$A_n = -B_n = \frac{2(U-u_0)}{n\pi}[1-(-1)^n]/(e^{\frac{nb\pi}{a}} - e^{-\frac{nb\pi}{a}})$$

$$v = \sum_{n=0}^{\infty}(A_n e^{\frac{n\pi y}{a}} + B_n e^{-\frac{n\pi y}{a}})\sin\frac{n\pi}{a}x = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(e^{\frac{n\pi y}{a}} - e^{-\frac{n\pi y}{a}})\sin\frac{n\pi}{a}x$$

数理方程：第二章：分离变量法

$$A_n = -B_n = \frac{2(U-u_0)}{n\pi}[1-(-1)^n]/(e^{\frac{nb\pi}{a}} - e^{-\frac{nb\pi}{a}})$$

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (e^{\frac{n\pi y}{a}} - e^{-\frac{n\pi y}{a}}) \sin \frac{n\pi}{a} x$$

$$u = v + u_0$$

$$= u_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(U-u_0)}{n\pi}[1-(-1)^n] \frac{sh(\frac{n\pi y}{a})}{sh(\frac{n\pi b}{a})} \sin \frac{n\pi}{a} x$$

数理方程：第二章：分离变量法

例：铀块的中子扩散和增殖过程。每秒钟在单位体积中产生的中子数用 βu 表示。研究厚为l的层状铀块。求临界厚度。

泛定方程 $u_t - a^2 u_{xx} - \beta u = 0$

边界无中子流入与流处
$$\begin{cases} u_x\big|_{x=0} = 0 \\ u_x\big|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

临界条件 $u_t = 0$ ⟹ $a^2 u_{xx} + \beta u = 0$

⟹ $u_{xx} + \dfrac{\beta}{a^2} u = 0$

数理方程：第二章：分离变量法

$$u_{xx}+\frac{\beta}{a^2}u=0$$

$$\begin{cases} u_x\big|_{x=0}=0 \\ u_x\big|_{x=l}=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$u=A\cos\frac{\sqrt{\beta}}{a}x+B\sin\frac{\sqrt{\beta}}{a}x$$

$$u_x=A\frac{\sqrt{\beta}}{a}\sin\frac{\sqrt{\beta}}{a}x+B\frac{\sqrt{\beta}}{a}\cos\frac{\sqrt{\beta}}{a}x$$

$$u_x\big|_{x=0}=B\frac{\sqrt{\beta}}{a}=0$$

$$B=0$$

$$u_x\big|_{x=l}=A\frac{\sqrt{\beta}}{a}\sin\frac{\sqrt{\beta}}{a}l=0$$

$$\frac{\sqrt{\beta}}{a}l=n\pi$$

数理方程：第二章：分离变量法

$$u = A\cos\frac{\sqrt{\beta}}{a}x + B\sin\frac{\sqrt{\beta}}{a}x$$

$$B = 0 \qquad \frac{\sqrt{\beta}}{a}l = n\pi \quad \Rightarrow \quad l = \frac{a}{\sqrt{\beta}}n\pi$$

n=0, ***l*****=0无意义**

n=1, $l = \frac{a}{\sqrt{\beta}}\pi$ 为最小厚度

中子浓度分布 $\quad u(x) = A\cos\frac{\sqrt{\beta}}{a}x$

例：薄膜的限定源扩散，膜厚为l,膜两面的表层已有一定杂质，如每单位表面下杂质总量为 ϕ_0, 但此外不再有杂质进入薄膜。

泛定方程 $u_t - a^2 u_{xx} = 0$

边界无杂质进入薄膜 $\begin{cases} u_x\big|_{x=0} = 0 \\ u_x\big|_{x=l} = 0 \end{cases}$

每单位表面下杂质总量为 ϕ_0

$$u_{t=0} = \Phi_0[\delta(x^+) + \delta(x - l^-)]$$

有解

$$\Rightarrow \quad u = \sum_{k=0}^{\infty} C_k e^{-\frac{k^2\pi^2 a^2}{l^2}t} \cos\frac{k\pi x}{l}$$

数理方程：第二章：分离变量法

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} C_k e^{-\frac{k^2\pi^2 a^2}{l^2}t} \cos\frac{k\pi x}{l}$$

代入初始条件 $u_{t=0} = \Phi_0[\delta(x^+) + \delta(x - l^-)]$

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k \cos\frac{k\pi x}{l} = \Phi_0[\delta(x^+) + \delta(x - l^-)]$$

$$\Rightarrow C_0 = \frac{1}{l}\int_0^l \Phi_0[\delta(\xi^+) + \delta(\xi - l^-)]d\xi = \frac{2}{l}\Phi_0$$

$$C_k = \frac{2}{l}\int_0^l \Phi_0[\delta(\xi^+) + \delta(\xi - l^-)]\cos\frac{k\pi \xi}{l}d\xi$$

数理方程：第二章：分离变量法

$$u=\sum_{k=0}^{\infty}C_k e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{l^2}t}\cos\frac{k\pi x}{l}$$

$$C_0=\frac{2}{l}\Phi_0$$

$$C_k=\frac{2}{l}\int_0^l\Phi_0[\delta(\xi^+)+\delta(\xi-l^-)]\cos\frac{k\pi\xi}{l}d\xi$$

$$=\frac{2}{l}\Phi_0[1+(-1)^k]=\frac{4}{l}\Phi_0$$

$$k=2n$$

$$u=\frac{2}{l}\Phi_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{l}\Phi_0 e^{-\frac{4n^2\pi^2a^2}{l^2}t}\cos\frac{2n\pi x}{l}$$

数理方程：第二章：分离变量法

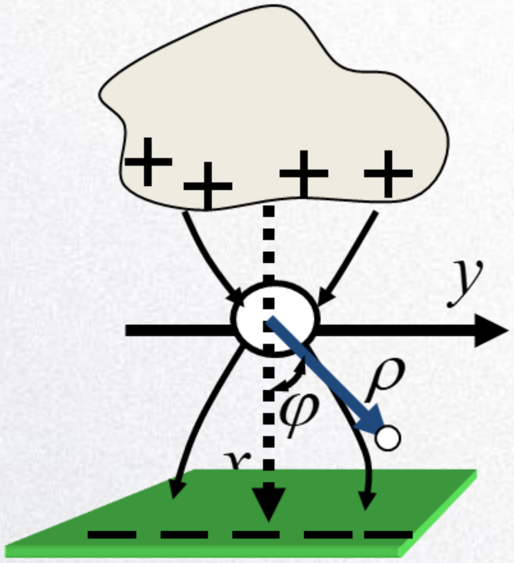
例：输电线影响带电云层与地间的电场

空间一点电势为 u　$\Delta u = -\rho/\varepsilon_0$

柱外泛定方程 $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$

导体为等势体，不妨 u=0

边界条件　$u\big|_{x^2+y^2=a^2} = 0$



Laplace 方程在极坐标下的表达方程为

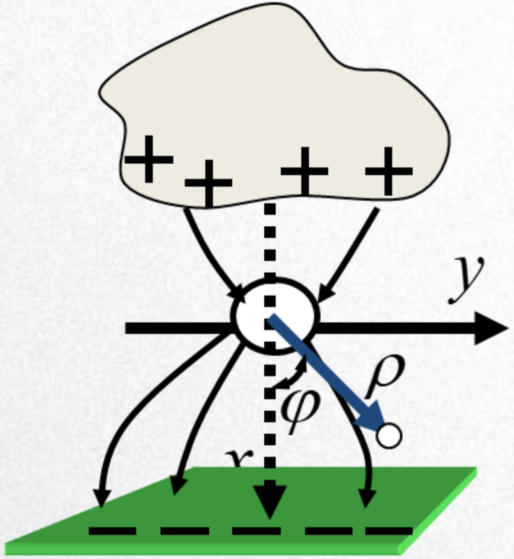
$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \qquad (\rho > a)$$

数理方程：第二章：分离变量法

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0$$

$$(\rho > a)$$

$$u\Big|_{x^2+y^2=a^2}=0 \qquad u\Big|_{\rho=a}=0$$



无限远处，**E_y=0, E_x=E_0**

即：

$$E_0=-\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{\rho\to\infty} \qquad u\Big|_{\rho\to\infty}=-E_0 x=-E_0\rho\cos\varphi$$

数理方程：第二章：分离变量法

泛定方程 $$\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0 \qquad (\rho>a)$$

边界条件 $$\begin{cases} u\big|_{\rho=a}=0 \\ u\big|_{\rho\to\infty}=-E_0x=-E_0\rho\cos\varphi \end{cases}$$

解： $u=R(\rho)\Phi(\varphi)$

$$\frac{d^2R}{d\rho^2}\Phi+\frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho}\Phi+\frac{R}{\rho^2}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=0$$

$$\frac{\rho^2}{R}\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{\rho}{R}\frac{\partial R}{\partial\rho}=-\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}\overset{令}{=}\lambda$$

数理方程：第二章：分离变量法

$$\frac{\rho^2}{R}\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{\rho}{R}\frac{dR}{d\rho}=-\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=\lambda$$

$$\Phi''+\lambda\Phi=0 \qquad \rho^2R''+\rho R'-\lambda R=0$$

因为 $u(\rho,\varphi+2\pi)=u(\rho,\varphi)$

$$\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi)$$

$$\Phi(\varphi)=\begin{cases} A\cos\sqrt{\lambda}\,\varphi+B\sin\sqrt{\lambda}\,\varphi & (\lambda>0) \\ A+B\varphi & (\lambda=0) \\ Ae^{\sqrt{\lambda}\varphi}+Be^{-\sqrt{\lambda}\varphi} & (\lambda<0) \end{cases}$$

数理方程：第二章：分离变量法

$$\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi)$$

$$\Phi(\varphi)=\begin{cases} A\cos\sqrt{\lambda}\ \varphi+B\sin\sqrt{\lambda}\ \varphi & (\lambda>0) \\ A+B\varphi & (\lambda=0) \\ Ae^{\sqrt{\lambda}\varphi}+Be^{-\sqrt{\lambda}\varphi} & (\lambda<0) \end{cases}$$

$\lambda>0$ $\quad A\cos\sqrt{\lambda}\ \varphi+B\sin\sqrt{\lambda}\ \varphi=A\cos\sqrt{\lambda}\ (\varphi+2\pi)+B\sin\sqrt{\lambda}\ (\varphi+2\pi)$

→ $\sqrt{\lambda}=m$ $\quad \lambda=m^2$ $\quad (m=0,1,2,3\cdots)$

$\lambda=0$ $\quad A+B\varphi=A+B(\varphi+2\pi)$ → $B=0$

数理方程：第二章：分离变量法

$\lambda = m^2 \qquad (m = 0,1,2,3\cdots) \qquad B = 0$

$$\Phi(\varphi) = \begin{cases} A\cos\sqrt{\lambda}\ \varphi + B\sin\sqrt{\lambda}\ \varphi & (\lambda > 0) \\ A + B\varphi & (\lambda = 0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \Phi(\varphi) = \begin{cases} A\cos m\varphi + B\sin m\varphi & (\lambda > 0) \\ A & (\lambda = 0) \end{cases}$$

常微分方程 $\rho^2 R'' + \rho R' - \lambda R = 0$

$(\lambda > 0) \qquad \rho^2 R'' + \rho R' - m^2 R = 0$ 为欧勒方程

数理方程：第二章：分离变量法

令 $\rho = e^t$　　则 $\dfrac{dR}{d\rho} = \dfrac{dR}{dt}\dfrac{dt}{d\rho} = e^{-t}\dfrac{dR}{dt}$

$(\lambda > 0)$　　$\rho^2 R'' + \rho R' - m^2 R = 0$

$$\rho = e^t \qquad \frac{dR}{d\rho} = \frac{dR}{dt}\frac{dt}{d\rho} = e^{-t}\frac{dR}{dt}$$

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} = \frac{d}{d\rho}\left(\frac{dR}{dt}\frac{dt}{d\rho}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dR}{dt}\frac{dt}{d\rho}\right)\frac{dt}{d\rho}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(e^{-t}\frac{dR}{dt}\right)e^{-t} = -e^{-2t}\frac{dR}{dt} + e^{-2t}\frac{d^2R}{dt^2}$$

数理方程：第二章：分离变量法

$(\lambda > 0)$ $$\rho^2 R'' + \rho R' - m^2 R = 0$$

$$\rho = e^t \qquad \frac{dR}{d\rho} = e^{-t}\frac{dR}{dt} \qquad \frac{d^2R}{d\rho^2} = -e^{-2t}\frac{dR}{dt} + e^{-2t}\frac{d^2R}{dt^2}$$

$$e^{2t}\left(-e^{-2t}\frac{dR}{dt} + e^{-2t}\frac{d^2R}{dt^2}\right) + e^t\left(e^{-t}\frac{dR}{dt}\right) - m^2 R = 0$$

↓

$$\frac{d^2R}{dt^2} - m^2 R = 0 \quad \Rightarrow \quad R = Ce^{mt} + De^{-mt}$$

$$= C\rho^m + D\rho^{-m} \qquad (m \neq 0)$$

数理方程：第二章：分离变量法

$(\lambda > 0)$ $$\rho^2 R'' + \rho R' - m^2 R = 0$$

$\rho = e^t$ $$\frac{d^2 R}{dt^2} - m^2 R = 0$$

$(m \neq 0)$ $$R = Ce^{mt} + De^{-mt} = C\rho^m + D\rho^{-m}$$

$(m = 0)$ $$R = C + Dt \quad = C + D\ln\rho$$

数理方程：第二章：分离变量法

$$R=\begin{cases} C\rho^{m}+D\rho^{-m} & (m\neq 0) \\ C+D\ln\rho & (m=0) \end{cases}$$

$$\Phi(\varphi)=\begin{cases} A\cos m\varphi+B\sin m\varphi & (m\neq 0) \\ A & (m=0) \end{cases}$$

$$u_0=C_0+D_0\ln\rho$$

$$u_m=\rho^{m}(A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi)$$

$$+\rho^{-m}(C_m\cos m\varphi+D_m\sin m\varphi)$$

数理方程：第二章：分离变量法

$$u_0 = C_0 + D_0 \ln \rho$$

$$u_m = \rho^m (A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi) + \rho^{-m} (C_m \cos m\varphi + D_m \sin m\varphi)$$

$$u = C_0 + D_0 \ln \rho + \sum_{m=1}^{\infty} \rho^m (A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi) + \sum_{m=1}^{\infty} \rho^{-m} (C_m \cos m\varphi + D_m \sin m\varphi)$$

下面确定系数

边界条件 $u\big|_{\rho=a}=0$

⇒ $C_0+D_0\ln a=0$

$$u=C_0+D_0\ln\rho+\sum_{m=1}^{\infty}\rho^m(A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi)$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\rho^{-m}(C_m\cos m\varphi+D_m\sin m\varphi)$$

数理方程：第二章：分离变量法

$$u\big|_{\rho=a}=0 \Rightarrow \begin{cases} C_0+D_0\ln a=0 \\ a^m A_m+a^{-m}C_m=0 \\ a^m B_m+a^{-m}D_m=0 \end{cases}$$

边界条件

$$u\big|_{\rho\to\infty}=-E_0x=-E_0\rho\cos\varphi$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\rho^m(A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi)=-E_0\rho\cos\varphi \Rightarrow \begin{cases} C_0+D_0\ln a=0 \\ a^m A_m+a^{-m}C_m=0 \\ a^m B_m+a^{-m}D_m=0 \end{cases}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\rho^m(A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi)=-E_0\rho\cos\varphi$$

$$\begin{cases}C_0=-D_0\ln a\\ A_1=-E_0\\ B_1=0\\ C_1=a^2E_0\end{cases}\qquad\begin{cases}A_m=0\\ B_m=0 & (m>1)\\ C_m=0\\ D_m=0 & (m\ge 1)\end{cases}$$

若导体原来不带电$D_0=0$

$$u=C_0+D_0\ln\rho+\sum_{m=1}^{\infty}\rho^m(A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi)$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\rho^{-m}(C_m\cos m\varphi+D_m\sin m\varphi)=D_0\ln\frac{\rho}{a}-E_0\rho\cos\varphi+E_0\frac{a^2}{\rho}\cos\varphi$$

数理方程：第二章：分离变量法

例：半径为a,表面熏黑的金属长圆柱，受到阳光照射，阳光的方向垂直于柱轴，热流强度为q，求柱内稳定温度分布。

泛定方程 $u_t - \Delta_2 u = 0$

$$
\begin{cases}
m = \dfrac{q}{k} \qquad H = \dfrac{h}{k} \\
\left(\dfrac{\partial u}{\partial \rho} + Hu\right)\Big|_{\rho=a} = m\sin\varphi + Hu_0 & 0 \le \varphi \le \pi \\
\left(\dfrac{\partial u}{\partial \rho} + Hu\right)\Big|_{\rho=a} = Hu_0 & \pi \le \varphi \le 2\pi
\end{cases}
$$

数理方程：第二章：分离变量法

稳定温度分布 $\Delta_2 u = 0$

$$\left(k\frac{\partial u}{\partial \rho} + Hu\right)\Big|_{\rho=a} = f(\varphi) \begin{cases} q\sin\varphi & 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 & \pi \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

一般解

$$u = C_0 + D_0 \ln\rho + \sum_{m=1}^{\infty} \rho^m (A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi)$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \rho^{-m} (C_m \cos m\varphi + D_m \sin m\varphi)$$

$u(\rho,\varphi)\big|_{\rho\to 0} =$ 有限 ➡ $D_0 = 0 \quad C_m = 0 \quad D_m = 0$

数理方程：第二章：分离变量法

稳定温度分布 $\Delta_2 u = 0$

$$\left(k\frac{\partial u}{\partial \rho} + Hu\right)\Big|_{\rho=a} = f(\varphi)\begin{cases} q\sin\varphi & 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 & \pi \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

一般解 $$u = C_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \rho^m (A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi)$$

代入边界条件

$$HC_0 + \sum_{m=1}^{\infty}(km + Ha)a^{m-1}(A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi) = f(\varphi)$$

数理方程：第二章：分离变量法

$$f(\varphi)=\begin{cases} q\sin\varphi & 0\le\varphi\le\pi \\ 0 & \pi\le\varphi\le 2\pi \end{cases}$$

$$HC_0+\sum_{m=1}^{\infty}(km+Ha)a^{m-1}(A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi)=f(\varphi)$$

在[0，2π]区间展开付氏级数 $$HC_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}q\sin\varphi d\varphi$$

$$(km+Ha)a^{m-1}A_m=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}q\sin\varphi\cos m\varphi d\varphi=\cdots$$

$$(km+Ha)a^{m-1}B_m=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}q\sin\varphi\sin m\varphi d\varphi=\cdots$$

2.2 非齐次振动方程和输运方程（齐次边界条件）

考虑定解问题：

泛定方程 $$u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t)$$

边界条件 $$\begin{cases} u(x,t)\big|_{x=0}=0 \\ u(x,t)\big|_{x=l}=0 \end{cases}$$ 弦两端固定

初始条件 $$\begin{cases} u(x,t)\big|_{t=0}=0 \\ u_t(x,t)\big|_{t=0}=0 \end{cases}$$

用式 $u(x,t)=X(x)T(t)$ 代入方程，不能分离变量

数理方程：第二章：分离变量法

一、Fourier级数法

1、齐次解

对应齐次方程为

泛定方程 $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ 边界条件 $\begin{cases} u(x,t)\big|_{x=0} = 0 \\ u(x,t)\big|_{x=l} = 0 \end{cases}$

分离变量得本征方程 $u(x,t) = X(x)T(t)$

$$\begin{cases} X''+\lambda X = 0 \\ X(0) = 0 \qquad X(l) = 0 \end{cases} \Rightarrow X_n = C_n \sin\frac{n\pi}{l}x$$

2、$T_n(t)$ 的解

仿照常数变易法，令 $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x$

泛定方程 $u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t)$

将 $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x$ 代入泛定方程

$$\sum_{n=1}^{\infty}[T_n''(t)+(\frac{n\pi a}{l})^2T_n(t)]\sin\frac{n\pi}{l}x=f(x,t)$$

数理方程：第二章：分离变量法

$$\sum_{n=1}^{\infty}[T_n''(t)+(\frac{n\pi a}{l})^2 T_n(t)]\sin\frac{n\pi}{l}x=f(x,t)$$

$$T_n''(t)+(\frac{n\pi a}{l})^2 T_n(t)=f_n(t)$$

其中 $f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,t)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi$

数理方程：第二章：分离变量法

$$f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,t)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi$$

将 $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x$ 代入初始条件

$$\begin{cases}u(x,t)\big|_{t=0}=0\\ u_t(x,t)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\sin\frac{n\pi}{l}x=0\\ \sum_{n=1}^{\infty}T_n'(0)\sin\frac{n\pi}{l}x=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}T_n(0)=0\\ T_n'(0)=0\end{cases}$$

数理方程：第二章：分离变量法

$$\begin{cases} T_n''(t) + (\frac{n\pi a}{l})^2 T_n(t) = f_n(t) \\ T_n(0) = 0 \\ T_n'(0) = 0 \end{cases}$$

$$f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi, t)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi$$

$$\Rightarrow \quad T_n(t) = \frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)d\tau$$

$$\Downarrow$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)d\tau\right]\sin\frac{n\pi}{l}x$$

数理方程：第二章：分离变量法

例：求定解问题：

泛定方程 $u_t - a^2 u_{xx} = A\sin\omega t$

边界条件 $\begin{cases} u_x(x,t)\big|_{x=0} = 0 \\ u_x(x,t)\big|_{x=l} = 0 \end{cases}$

初始条件 $u(x,t)\big|_{t=0} = 0$

解：

$$X_n = C_n \cos\frac{n\pi}{l}x$$

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\cos\frac{n\pi}{l}x$$ 代入泛定方程有

$$\sum_{n=0}^{\infty}[T_n'(t) + (\frac{n\pi a}{l})^2 T_n(t)]\cos\frac{n\pi}{l}x = A\sin\omega t$$

数理方程：第二章：分离变量法

$$\sum_{n=0}^{\infty}[T_n'(t)+(\frac{n\pi a}{l})^2 T_n(t)]\cos\frac{n\pi}{l}x = A\sin\omega t$$

将 $u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)\cos\frac{n\pi}{l}x$ 代入初始条件 $u(x,t)\big|_{t=0}=0$

有 $\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\cos\frac{n\pi}{l}x=0$ ➡ $T_n(0)=0$

$n=0$ $\quad T_0'(t)=A\sin\omega t$ $\quad T_0(0)=0$

$n\neq 0$ $\quad T_n'(t)+(\frac{n\pi a}{l})^2 T_n(t)=0$

数理方程：第二章：分离变量法

$n = 0$

$$\begin{cases} T_0'(t) = A\sin\omega t \\ T_0(0) = 0 \end{cases}$$

$n \neq 0$

$$\begin{cases} T_n'(t) + (\frac{n\pi a}{l})^2 T_n(t) = 0 \\ T_n(0) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad T_0(t) = \frac{A}{\omega}(1 - \cos\omega t) \qquad T_n(t) = 0$$

$$\Rightarrow \quad u(x,t) = \frac{A}{\omega}(1 - \cos\omega t)$$

考虑定解问题:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t)$$

$$\begin{cases} u(x,t)\big|_{x=0} = 0 \\ u(x,t)\big|_{x=l} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u(x,t)\big|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t(x,t)\big|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\frac{n\pi}{l}x \quad \Rightarrow \quad T_n''(t) + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t) = f_n(t)$$

$$T_n(0) = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi \qquad T_n'(0) = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi$$

另一方法：考虑线性叠加法

令 $$u = u^{I} + u^{II}$$

有 $$u_{tt}^{I} - a^{2} u_{xx}^{I} = 0$$

$$\begin{cases} u^{I}(x,t)\big|_{x=0} = 0 \\ u^{I}(x,t)\big|_{x=l} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u^{I}(x,t)\big|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_{t}^{I}(x,t)\big|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

$$u_{tt}^{II} - a^{2} u_{xx}^{II} = f(x,t)$$

$$\begin{cases} u^{II}(x,t)\big|_{x=0} = 0 \\ u^{II}(x,t)\big|_{x=l} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u^{II}(x,t)\big|_{t=0} = 0 \\ u_{t}^{II}(x,t)\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

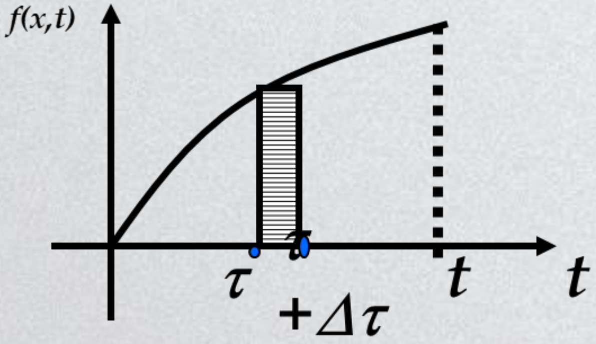
数理方程：第二章：分离变量法

(二)、冲量定理法 $(T_2 \sin\alpha_2 - T_1 \sin\alpha_1 + Fdx = \rho\, dxu_{tt})$

考虑强迫弦振动定解问题:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t) \qquad \begin{cases} u(x,t)\big|_{x=0} = 0 \\ u(x,t)\big|_{x=l} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u(x,t)\big|_{t=0} = 0 \\ u_t(x,t)\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

$$f(x,t) = \frac{1}{\rho} F(x,t)$$



f(x,t)表示单位长度、单位质量作用力

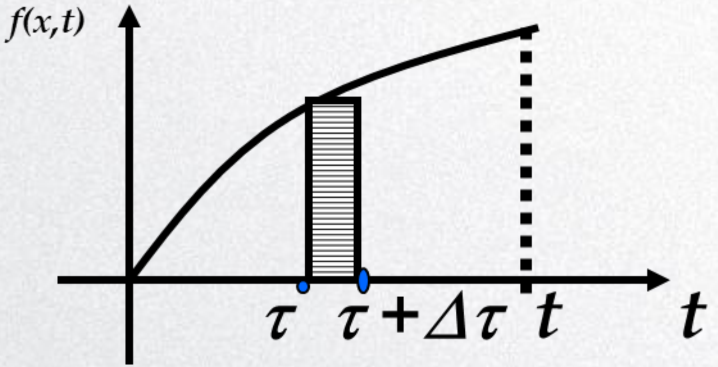
$f(x,\tau)\Delta\tau$ 表示 $\Delta\tau$ 内的冲量

这个冲量使得系统的速度有一定的增量，即 $f(x,\tau)\Delta\tau$，

现在，我们把在时间$\Delta\tau$ 内得到的速度增量看成是 t= τ 瞬时集中得到的，而在$\Delta\tau$ 的其余时间里没有冲量的作用，即认为在这段时间内没有力的作用，故方程是齐次的。 t= τ 时的集中速度可置于“初始”条件中，得到的关于瞬时力引起的振动的定解方程为：

$$u_{tt}^{(\tau)} - a^2 u_{xx}^{(\tau)} = 0$$

$$\begin{cases} u^{(\tau)}\big|_{x=0} = 0 \\ u^{(\tau)}\big|_{x=l} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u^{(\tau)}\big|_{t=\tau} = 0 \\ u_t^{(\tau)}\big|_{t=\tau} = f(x,\tau)\Delta\tau \end{cases}$$



$$(0 < x < l \quad \tau < t < \tau + d\tau)$$

显然 $u^{(\tau)} = u^{(\tau)}(x,t,\tau,\Delta\tau)$

数理方程：第二章：分离变量法

令 $u^{(\tau)}(x,t,\tau,\Delta\tau)=v(x,t,\tau)\Delta\tau$

$$\Rightarrow \quad v_{tt}-a^2v_{xx}=0 \qquad (0<x<l \quad t>\tau)$$

$$\begin{cases} v\big|_{x=0}=0 \\ v\big|_{x=l}=0 \end{cases} (t>\tau) \qquad \begin{cases} v\big|_{t=\tau}=0 \\ v_t\big|_{t=\tau}=f(x,\tau) \end{cases} (0<x<l)$$

而 $u(x,t)=\lim\limits_{\Delta\tau\to 0}\sum\limits_{\tau=0}^{t}u^{(\tau)}(x,t;\tau)=\lim\limits_{\Delta\tau\to 0}\sum\limits_{\tau=0}^{t}v(x,t;\tau)\Delta\tau$

$$=\int_0^t v(x,t;\tau)d\tau$$

例：用冲量法求定解问题：

泛定方程 $$u_{tt}-a^2u_{xx}=A\cos\frac{\pi x}{l}\sin\omega t$$

边界条件 $$\begin{cases} u_x(x,t)\big|_{x=0}=0 \\ u_x(x,t)\big|_{x=l}=0 \end{cases}$$

初始条件 $$\begin{cases} u(x,t)\big|_{t=0}=0 \\ u_t(x,t)\big|_{t=0}=0 \end{cases}$$

$$(0<x<l \quad t>0)$$

解：用冲量法，上述定解问题变为 v 的定解问题

$$v_{tt}-a^2v_{xx}=0$$

$$\begin{cases} v_x\big|_{x=0}=0 \\ v_x\big|_{x=l}=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} v\big|_{t=\tau}=0 \\ v_t\big|_{t=\tau}=A\cos\frac{\pi x}{l}\sin\omega\tau \end{cases}$$

$$(0<x<l \quad \tau<t<\tau+d\tau)$$

数理方程：第二章：分离变量法

$$v_0 = A_0 + B_0(t-\tau) \qquad v_n = [A_n \cos\frac{n\pi a(t-\tau)}{l} + B_n \sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}]\cos\frac{n\pi}{l}x$$

$$v = A_0 + B_0(t-\tau) + \sum_{n=1}^{\infty}[A_n \cos\frac{n\pi a(t-\tau)}{l} + B_n \sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}]\cos\frac{n\pi}{l}x$$

代入初始 $\quad v\big|_{t=\tau} = 0 \qquad v_t\big|_{t=\tau} = A\cos\frac{\pi x}{l}\sin\omega\tau$

有 $\quad A_0 = 0 \qquad A_n = 0$

$$v_t\big|_{t=\tau} = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi a}{l}\cos\frac{n\pi}{l}x = A\cos\frac{\pi x}{l}\sin\omega\tau$$

数理方程：第二章：分离变量法

初始 $$v_t\big|_{t=\tau}=A\cos\frac{\pi x}{l}\sin\omega\tau \qquad A_0=0 \qquad A_n=0$$

$$v_t\big|_{t=\tau}=B_0+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{n\pi a}{l}\cos\frac{n\pi}{l}x=A\cos\frac{\pi x}{l}\sin\omega\tau$$

有 $$B_0=0 \qquad B_1=\frac{lA}{\pi a}\sin\omega\tau$$

$$B_n=0 \qquad (n=2,3,\cdots)$$

于是 $$v=\frac{lA}{\pi a}\sin\omega\tau\sin\frac{\pi a(t-\tau)}{l}\cos\frac{n\pi}{l}x$$

$$v=\frac{lA}{\pi a}\sin\omega\tau\sin\frac{\pi a(t-\tau)}{l}\cos\frac{n\pi}{l}x$$

于是

$$u=\int_0^t v(x,t;\tau)d\tau$$

$$=\int_0^t\frac{lA}{\pi a}\sin\omega\tau\sin\frac{\pi a(t-\tau)}{l}\cos\frac{n\pi}{l}x\,d\tau$$

$$=\frac{lA}{\pi a}\frac{\omega\sin\frac{\pi at}{l}-\frac{\pi a}{l}\sin\omega t}{\omega^2-\frac{\pi^2a^2}{l^2}}\cos\frac{n\pi}{l}x$$

2.3 非齐次边界条件的处理

考虑定解问题：

泛定方程 $u_{tt}-a^2u_{xx}=0$

边界条件 $\begin{cases} u(x,t)\big|_{x=0}=\mu(t) \\ u(x,t)\big|_{x=l}=\nu(t) \end{cases}$

初始条件 $\begin{cases} u(x,t)\big|_{t=0}=\varphi(x) \\ u_t(x,t)\big|_{t=0}=\psi(x) \end{cases}$

用式 $u(x,t)=X(x)T(t)$ 代入方程，不能分离变量

数理方程：第二章：分离变量法

1、边界条件的齐次化

令 $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$

使

$$\begin{cases} w(x,t)\big|_{x=0}=\mu(t) \\ w(x,t)\big|_{x=l}=\nu(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v(x,t)\big|_{x=0}=0 \\ v(x,t)\big|_{x=l}=0 \end{cases}$$

2、辅助函数$w(x,t)$的选取　具有上述性质的w(x,t)有多个，最简单选取一条 w(x,t)–x 直线 $w(x,t)=A(t)x+B(t)$

于是

$$\begin{cases} B(t)=\mu(t) \\ A(t)l+B(t)=\nu(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(t)=\mu(t) \\ A(t)=\dfrac{\nu(t)-\mu(t)}{l} \end{cases}$$

数理方程：第二章：分离变量法

$$w(x,t)=\frac{v(t)-\mu(t)}{l}x+\mu(t)$$

定解问题成为：

泛定方程 $$v_{tt}-a^2v_{xx}=-(w_{tt}-a^2w_{xx})$$

边界条件 $$\begin{cases} v(x,t)\big|_{x=0}=0 \\ v(x,t)\big|_{x=l}=0 \end{cases}$$ 弦两端固定

初始条件 $$\begin{cases} v(x,t)\big|_{t=0}=\varphi(x)-w(x,0) \\ v_t(x,t)\big|_{t=0}=\psi(x)-w_t(x,0) \end{cases}$$

例：研究一端固定，一端作周期运动的弦振动

泛定方程 $$u_{tt}-a^2u_{xx}=0$$

边界条件 $$\begin{cases} u(x,t)\big|_{x=0}=0 \\ u(x,t)\big|_{x=l}=\sin\omega t \end{cases}$$

初始条件 $$\begin{cases} u(x,t)\big|_{t=0}=0 \\ u_t(x,t)\big|_{t=0}=0 \end{cases}$$

$$(0\le x\le l \quad t>0)$$

解： 令 $$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$$

$$w(x,t)=\frac{v(t)-\mu(t)}{l}x+\mu(t)=\frac{\sin\omega t-0}{l}x+0=x\frac{\sin\omega t}{l}$$

数理方程：第二章：分离变量法

$$w = x\frac{\sin\omega t}{l}$$

$$v_{tt} - a^2 v_{xx} = -(w_{tt} - a^2 w_{xx}) = \frac{\omega^2}{l} x\sin\omega t$$

$$\begin{cases} v(x,t)\big|_{x=0} = 0 \\ v(x,t)\big|_{x=l} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} v(x,t)\big|_{t=0} = \varphi(x) - w(x,0) = 0 \\ v_t(x,t)\big|_{t=0} = \psi(x) - w_t(x,0) = -x\dfrac{\omega}{l} \end{cases}$$

再令 $v(x,t) = v^I(x,t) + v^{II}(x,t)$

数理方程：第二章：分离变量法

有 $$v_{tt}^{I}-a^2v_{xx}^{I}=0$$

$$\begin{cases} v^{I}(x,t)\big|_{x=0}=0 \\ v^{I}(x,t)\big|_{x=l}=0 \end{cases}\qquad \begin{cases} v^{I}(x,t)\big|_{t=0}=0 \\ v_t^{I}(x,t)\big|_{t=0}=-\dfrac{\omega}{l}x \end{cases}$$

$$v_{tt}^{II}-a^2v_{xx}^{II}=\frac{\omega^2}{l}x\sin\omega t$$

$$\begin{cases} v^{II}(x,t)\big|_{x=0}=0 \\ v^{II}(x,t)\big|_{x=l}=0 \end{cases}\qquad \begin{cases} v^{II}(x,t)\big|_{t=0}=0 \\ v_t^{II}(x,t)\big|_{t=0}=0 \end{cases}$$

⇒

$$v^{I}=\cdots$$

$$v^{II}=\cdots$$

3、其它非齐次边界条件的处理

泛定方程 $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$

边界条件 $\begin{cases} u_x(x,t)\big|_{x=0} = \mu(t) \\ u_x(x,t)\big|_{x=l} = \nu(t) \end{cases}$　　初始条件 $\begin{cases} u(x,t)\big|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t(x,t)\big|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$

令 $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$　　$w(x,t) = A(t)x^2 + B(t)x$

使 $\begin{cases} w_x(x,t)\big|_{x=0} = \mu(t) \\ w_x(x,t)\big|_{x=l} = \nu(t) \end{cases}$ ⇒ $\begin{cases} v_x(x,t)\big|_{x=0} = 0 \\ v_x(x,t)\big|_{x=l} = 0 \end{cases}$

⇒ $A(t) = [\nu(t) - \mu(t)]/(2l)$　　$B(t) = \mu(t)$

2.4 泊松方程

定解问题： 泊松方程 $\Delta u = f(x,y,z)$ 与时间无关

不管边界条件如何，令特解 v $u = v + w$

$$\Delta v + \Delta w = f$$

若 $\Delta w = f - \Delta v = 0$ 就转化为 Laplace 方程

例：在圆域内求泊松方程边值问题

泊松方程
边界条件

$$\begin{cases} \Delta u = a + b(x^2 - y^2) \\ u\big|_{\rho=\rho_0} = C \end{cases}$$

数理方程：第二章：分离变量法

解:

1）、寻找泊松方程的特解 $\Delta u = a + b(x^2 - y^2)$

考虑

$$\begin{cases} \Delta(ax^2) = 2a \\ \Delta(ay^2) = 2a \\ \Delta(bx^4) = 12bx^2 \\ \Delta(by^4) = 12by^2 \end{cases}$$

由对称性 ⇒

$$\begin{cases} \Delta\left(\dfrac{ax^2 + ay^2}{4}\right) = a \\ \Delta\left(\dfrac{bx^4}{12}\right) = bx^2 \\ \Delta\left(\dfrac{by^4}{12}\right) = by^2 \end{cases}$$

令特解 v

$$v=\frac{ax^2+ay^2}{4}+\frac{bx^4}{12}-\frac{by^4}{12}$$

$$=\frac{a}{4}\rho^2+\frac{b(x^2+y^2)(x^2-y^2)}{12}=\frac{a}{4}\rho^2+\frac{b\rho^4\cos 2\varphi}{12}$$

$$v=\frac{a}{4}\rho^2+\frac{b\rho^4\cos 2\varphi}{12}$$

$$u=v+w=\frac{a}{4}\rho^2+\frac{b\rho^4\cos 2\varphi}{12}+w$$

2）、泊松方程的转化为

泊松方程

边界条件

$$\begin{cases} \Delta u = a + b(x^2 - y^2) \\ u\big|_{\rho=\rho_0} = C \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta w = 0 \\ w\big|_{\rho=\rho_0} = C - \dfrac{a}{4}\rho_0^2 - \dfrac{b\rho_0^4 \cos 2\varphi}{12} \end{cases}$$

为 Laplace 方程

数理方程：第二章：分离变量法

$$\begin{cases} \Delta w = 0 \\ w\big|_{\rho=\rho_0} = C - \dfrac{a}{4}\rho_0^2 - \dfrac{b\rho_0^4 \cos 2\varphi}{12} \end{cases}$$

方程一般解

$$w = C_0 + D_0 \ln\rho + \sum_{m=1}^{\infty} \rho^m (A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi)$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \rho^{-m} (C_m \cos m\varphi + D_m \sin m\varphi)$$

圆域内 ⇒ $C_m = 0 \qquad D_m = 0 \qquad D_0 = 0$

⇒ $$w = \sum_{m=0}^{\infty} \rho^m (A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi)$$

$$\begin{cases} \Delta w = 0 \\ w\big|_{\rho=\rho_0} = C - \dfrac{a}{4}\rho_0^2 - \dfrac{b\rho_0^4\cos 2\varphi}{12} \end{cases}$$

$$w = \sum_{m=0}^{\infty} \rho^m (A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi)$$ 代入边界条件

$$\sum_{m=0}^{\infty} \rho_0^m (A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi) = C - \frac{a}{4}\rho_0^2 - \frac{b\rho_0^4\cos 2\varphi}{12}$$

$$\Rightarrow \quad A_0 = C - \frac{a}{4}\rho_0^2 \qquad A_2 = -\frac{b\rho_0^4}{12} \qquad A_m = 0 \qquad B_m = 0$$

数理方程：第二章：分离变量法

$$w=\sum_{m=1}^{\infty}\rho^{m}(A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi)$$

$$A_0=C-\frac{a}{4}\rho_0^2 \qquad A_2=-\frac{b\rho_0^4}{12} \qquad A_m=0$$

$$B_m=0$$

$$\Rightarrow\quad u=v+w=\frac{a}{4}\rho^2+\frac{b\rho^4\cos 2\varphi}{12}+w$$

$$=C+\frac{a}{4}(\rho^2-\rho_0^2)+\frac{b\rho^2(\rho^2-\rho_0^2)\cos 2\varphi}{12}$$

例：在0≤x≤a 0≤y≤b 上求泊松方程边值问题

泊松方程 $\Delta u = -2$

边界条件 $\begin{cases} u\big|_{x=0} = 0 \\ u\big|_{x=a} = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} u\big|_{y=0} = 0 \\ u\big|_{y=b} = 0 \end{cases}$

解：1）、寻找泊松方程的特解

考虑 $\Delta(-x^2) = -2$

$$\Delta(-x^2 + c_1 x + c_2) = -2$$

$$v = -x^2 + c_1 x + c_2$$

$$\begin{cases} v\big|_{x=0} = 0 \\ v\big|_{x=a} = 0 \end{cases} \Rightarrow c_1 = a \quad c_2 = 0$$

$$v = -x^2 + ax$$

数理方程：第二章：分离变量法

$$\Delta u = -2$$

$$\begin{cases} u|_{x=0} = 0 \\ u|_{x=a} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u|_{y=0} = 0 \\ u|_{y=b} = 0 \end{cases}$$

$$v = -x^2 + ax$$

$$u = v + w = -x^2 + ax + w$$

2）、泊松方程的转化为 ➡

$$\Delta w = 0$$

$$\begin{cases} w|_{x=0} = 0 \\ w|_{x=a} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} w|_{y=0} = x^2 - ax \\ w|_{y=b} = x^2 - ax \end{cases}$$

数理方程：第二章：分离变量法

$$\Delta w = 0 \quad \begin{cases} w\big|_{x=0} = 0 \\ w\big|_{x=a} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} w\big|_{y=0} = x^2 - ax \\ w\big|_{y=b} = x^2 - ax \end{cases}$$

其解

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n e^{\frac{n\pi y}{a}} + B_n e^{-\frac{n\pi y}{a}}\right) \sin\frac{n\pi}{a}x$$

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + B_n) \sin\frac{n\pi}{a}x = x^2 - ax \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n e^{\frac{n\pi b}{a}} + B_n e^{-\frac{n\pi b}{a}}\right) \sin\frac{n\pi}{a}x = x^2 - ax \end{cases}$$

Fourier展开

$$x^2 - ax = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi}{a}x$$

其解

$$C_n = \frac{2}{a}\int_0^a (\xi^2 - a\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{a}d\xi \quad = \frac{4a^2}{n^3\pi^3}[(-1)^n - 1]$$

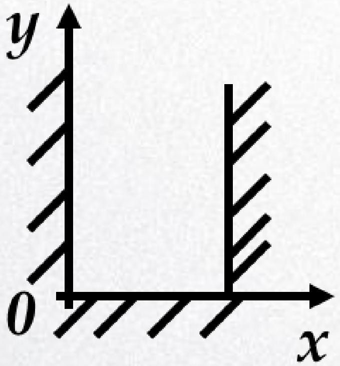
$$\begin{cases} A_n + B_n = C_n \\ A_n e^{\frac{n\pi b}{a}} + B_n e^{-\frac{n\pi b}{a}} = C_n \end{cases}$$

⇒ $A_n \quad B_n$

⇒ $w(x, y) \quad u(x, y)$

例：研究半带形区域的电势 $u(x,y)$ Laplace方程

$$\Delta u = 0 \qquad (0 < x < a, 0 < y < \infty)$$



边界条件

$$\begin{cases} u\big|_{x=0} = 0 & (0 \le y < \infty) \\ u\big|_{x=a} = u_0 & \\ u\big|_{y=0} = 0 & (0 \le x \le a) \end{cases}$$

解：

$$u = v + w$$

考虑

$$v = \frac{u_0 x}{a}$$

数理方程：第二章：分离变量法

$$\Delta w = 0$$

$$\begin{cases} w\big|_{x=0} = 0 \\ w\big|_{x=a} = 0 \end{cases} \qquad w\big|_{y=0} = -\frac{u_0 x}{a} \qquad v = \frac{u_0 x}{a}$$

$$w = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n e^{\frac{n\pi y}{a}} + B_n e^{-\frac{n\pi y}{a}}\right)\sin\frac{n\pi}{a}x$$

$$w\big|_{y\to\infty} = \text{有限值}$$ $$A_n = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi}{a}x = -\frac{u_0 x}{a}$$

等式右边作付氏展开 $B_n = (-1)^n \dfrac{2u_0}{n\pi}$

THANKS

Q & A ?