



工程数学

25-26年度第二学期

网络授课

课程号: 00330760 工能必修+航材生限选+双培

2026.05

第四章 积分变换法

在复变函数理论中，我们曾用拉普拉斯变换法求解常微分方程。经过变换，常微分方程变成了代数方程，解出代数方程，再进行反演就得到了原来常微分方程的解。

● 数理方程：第四章：积分变换法

积分变换法是通过积分变换简化定解问题的一种有效的求解方法。对于多个自变量的线性偏微分方程，可以通过实施积分变换来减少方程的自变量个数，直至化为常微分方程，这就使问题得到大大简化，再进行反演，就得到了原来偏微分方程的解。积分变换法在数学物理方程（也包括积分方程、差分方程等）中亦具有广泛的用途。尤其当泛定方程及边界条件均为非齐次时，用经典的分离变量法求解，就显得有些烦琐和笨拙，而积分变换法为这类问题提供了一种系统的解决方法，并且显得具有固定的程序，按照解法程序进行易于求解。利用积分变换，有时还能得到有限形式的解，而这往往是用分离变量法不能得到的。

● 数理方程：第四章：积分变换法

特别是对于无界或半无界的定界问题，用积分变换来求解，最合适不过了。（注明：无界或半无界的定界问题也可以用行波法求解）

用积分变换求解定解问题的步骤为：

第一：根据自变量的变化范围和定解条件确定选择适当的积分变换；

对于自变量在 $(-\infty, \infty)$ 内变化的定解问题（如无界域的坐标变量）常采用傅氏变换，而自变量在 $(0, \infty)$ 内变化的定解问题（如时间变量）常采用拉氏变换。

● 数理方程：第四章：积分变换法

第二：对方程取积分变换，将一个含两个自变量的偏微分方程化为一个含参量的常微分方程；

第三：对定解条件取相应的变换，导出常微分方程的定解条件；

第四：求解常微分方程的解，即为原定解问题的变换；

第五：对所得解取逆变换，最后得原定解问题的解。

● 数理方程：第四章：积分变换法

4.1 傅里叶变换法解数学物理定解问题

用分离变量法求解有限空间的定解问题时，所得到的本征值谱是分立的，所求的解可表为对分立本征值求和的傅里叶级数。对于无限空间，用分离变量法求解定解问题时，所得到的本征值谱一般是连续的，所求的解可表为对连续本征值求积分的傅里叶积分。

因此，对于无限空间的定解问题，傅里叶变换是一种很适用的求解方法。本节将通过几个例子说明运用傅里叶变换求解无界空间（含一维半无界空间）的定界问题的基本方法，并给出几个重要的解的公式。

● 数理方程：第四章：积分变换法

下面的讨论我们假设待求解的函数 u 及其一阶导数是有限的。

4.1.1 弦振动问题

例1 求解无限长弦的自由振动定解问题

(假定：函数 u 及其一阶导数是有限的)

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, (-\infty < x < \infty) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

● 数理方程：第四章：积分变换法

解 应用傅里叶变换，即用 $e^{-i\omega x}$ 遍乘定解问题中的各式，并对空间变量 x 积分（这里把时间变量看成参数），按照傅里叶变换的定义，我们采用如下

的傅氏变换对：

$$U(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i\omega x} dx$$
$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega, t) e^{i\omega x} d\omega$$

简化表示为

$$F[u(x, t)] = U(\omega, t)$$

对其它函数也作傅氏变换，即为

$$F[\varphi(x)] = \Phi(\omega)$$

$$F[\psi(x)] = \Psi(\omega)$$

● 数理方程：第四章：积分变换法

于是原定解问题变换为下列常微分方程的定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + a^2 \omega^2 U(\omega, t) = 0 \\ U(\omega, t)|_{t=0} = \Phi(\omega) \\ U_t(\omega, t)|_{t=0} = \Psi(\omega) \end{cases}$$

上述常微分方程的通解为

$$U(\omega, t) = A(\omega)e^{i\omega at} + B(\omega)e^{-i\omega at}$$

代入初始条件可以定出

$$A(\omega) = \frac{1}{2}\Phi(\omega) + \frac{1}{2a} \frac{1}{i\omega} \Psi(\omega)$$

$$B(\omega) = \frac{1}{2}\Phi(\omega) - \frac{1}{2a} \frac{1}{i\omega} \Psi(\omega)$$

● 数理方程：第四章：积分变换法

这样

$$\begin{aligned}U(\omega, t) &= \frac{1}{2}\Phi(\omega)e^{i\omega t} + \frac{1}{2\omega i}\Psi(\omega)e^{i\omega t} + \frac{1}{2}\Phi(\omega)e^{-i\omega t} - \frac{1}{2\omega i}\Psi(\omega)e^{-i\omega t} \\&= \Phi(\omega)\cos(\omega t) + \frac{\Psi(\omega)}{\omega} \sin(\omega t)\end{aligned}$$

最后，上式乘以 $\frac{1}{2\pi}$ 并作逆傅氏变换。应用延迟定理和积分定理得到

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi$$

这正是前面学过的达朗贝尔公式。

● 数理方程：第四章：积分变换法

例2 为了说明傅氏变换法解非齐次方程特别简便，我们特举一强迫弦振动问题：

求解无限长弦的强迫振动方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), & (-\infty < x < \infty) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

解 根据与例1 相同的方法，作傅氏变换

$$F[u(x, t)] = U(\omega, t), \quad F[f(x, t)] = F(\omega, t),$$

$$F[\varphi(x)] = \Phi(\omega), \quad F[\psi(x)] = \Psi(\omega)$$

● 数理方程：第四章：积分变换法

我们容易得到原定解问题可变换为下列常微分方程的问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + a^2 \omega^2 U(\omega, t) = F(\omega, t) \\ U(\omega, t)|_{t=0} = \Phi(\omega), \\ U_t(\omega, t)|_{t=0} = \Psi(\omega), \end{cases}$$

上述问题的解为

$$U(\omega, t) = \frac{1}{a\omega} \int_0^t F(\omega, \tau) \sin a\omega(t-\tau) d\tau + \Phi(\omega) \cos(a\omega t) + \frac{\Psi(\omega)}{a\omega} \sin(a\omega t)$$

利用傅氏变换的性质有

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega, t)] = f(x, t)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{i\omega} F(\omega, \tau)\right] = \int_{x_0}^x f(\xi, \tau) d\xi$$

● 数理方程：第四章：积分变换法

故得到

$$F^{-1}[e^{\pm i\omega a(t-\tau)} \frac{1}{i\omega} F(\omega, t)] = \int_{x_0}^{x \pm a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi$$
$$\sin[\omega a(t-\tau)] = \frac{1}{2i} [e^{i\omega a(t-\tau)} - e^{-i\omega a(t-\tau)}]$$

代入得到

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \left[\int_{x_0}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi - \int_{x_0}^{x-a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi \right] d\tau$$
$$+ \frac{1}{2} [\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi$$

即得

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau$$
$$+ \frac{1}{2} [\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi$$

● 数理方程：第四章：积分变换法

4.1.2 热传导问题

例3 求解无限长细杆的热传导（无热源）问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & (-\infty < x < \infty, t > 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

解 作傅氏变换

$$F[u(x,t)] = U(\omega,t) \quad F[\varphi(x)] = \Phi(\omega)$$

定解问题变换为

$$\begin{cases} U' + \omega^2 a^2 U(\omega,t) = 0 \\ U(\omega,0) = \Phi(\omega) \end{cases}$$

● 数理方程：第四章：积分变换法

常微分方程的初值问题的解是

$$U(\omega, t) = \Phi(\omega) e^{-\omega^2 a^2 t}$$

再进行逆傅里叶变换,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \mathcal{F}^{-1}[U(\omega, t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) e^{-\omega^2 a^2 t} e^{i\omega x} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-i\omega \xi} d\xi \right] e^{-\omega^2 a^2 t} e^{i\omega x} d\omega \end{aligned}$$

交换积分次序

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2 a^2 t} e^{i\omega(x-\xi)} d\omega \right] d\xi$$

● 数理方程：第四章：积分变换法

引用积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \omega^2} e^{\beta \omega} d\omega = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \right) e^{\frac{\beta^2}{4\alpha^2}}$$

且令

$$\alpha = a\sqrt{t}, \beta = i(x - \xi)$$

以便利用积分公式，即得到

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \left[\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \right] d\xi$$

● 数理方程：第四章：积分变换法

例4 求解无限长细杆的有源热传导方程定解问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t), & (-\infty < x < \infty, t > 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

解 利用 $F[u(x, t)] = U(\omega, t)$, $F[f(x, t)] = F(\omega, t)$, $F[\varphi(x)] = \Phi(\omega)$

对定解问题作傅氏变换, 得到常微分方程的定解问题

$$\begin{cases} U' + \omega^2 a^2 U(\omega, t) = F(\omega, t) \\ U(\omega, 0) = \Phi(\omega) \end{cases}$$

上述问题的解为 $U(\omega, t) = \Phi(\omega)e^{-a^2\omega^2 t} + \int_0^t F(\omega, \tau)e^{-a^2\omega^2(t-\tau)} d\tau$

● 数理方程：第四章：积分变换法

为了求出上式的逆变换，利用下面傅氏变换的卷积公式，即

若
$$F^{-1}[G(\omega)] = g(x), \quad F^{-1}[F(\omega)] = f(x),$$

则
$$F^{-1}[F(\omega)G(\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi)g(\xi)d\xi$$

而积分

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \omega^2 t + i\omega x} d\omega = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left[-\frac{x^2}{4a^2 t}\right]$$

即为

$$F^{-1}[e^{-a^2 \omega^2 t}] = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left[-\frac{x^2}{4a^2 t}\right]$$

最后得到定解问题的解为

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi, \tau)}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 (t-\tau)}} d\xi$$

● 数理方程：第四章：积分变换法

4.1.3 稳定场问题

我们先给出求半平面内 ($y > 0$) 拉普拉斯方程的第一边值问题的傅氏变换系统解法（可以与格林函数解法进行比较）

例 5 定解问题

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & (-\infty < x < \infty, y > 0) \\ u(x, 0) = f(x) \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, y) = 0 \end{cases}$$

解 对于变量 x 作傅氏变换，有

$$\mathbf{F}^{-1}[u(x, y)] = U(\omega, y), \quad \mathbf{F}[f(x)] = F(\omega)$$

● 数理方程：第四章：积分变换法

定解问题变换为常微分方程 $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \omega^2 U(\omega, y) = 0,$

$$U(\omega, 0) = F(\omega)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} U(\omega, y) = 0$$

因为 ω 可取正、负值，所以常微分定解问题的通解为 $U(x, y) = C(\omega)e^{|\omega|y} + D(\omega)e^{-|\omega|y}$

因为 $\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} U(\omega, y) = 0$ ，故得到

$$C(\omega) = 0, \quad D(\omega) = F(\omega)$$

常微分方程的解为 $U(\omega, y) = F(\omega)e^{-|\omega|y}$

设 $G(\omega, y) = e^{-|\omega|y}$

● 数理方程：第四章：积分变换法

根据傅氏变换定义， $e^{-|\omega|y}$ 的傅氏逆变换为

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\omega|y} e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\infty} e^{-\omega y + i\omega x} d\omega + \int_{-\infty}^0 e^{\omega y + i\omega x} d\omega \right] = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{y - ix} + \frac{1}{y + ix} \right] = \frac{y}{\pi(x^2 + y^2)}$$

再利用卷积公式

$$F^{-1}[F(\omega)G(\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)g(x - \xi)d\xi$$

最后得到原定解问题的解为

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi$$

容易看出与格林函数解出的结果具有相同的表示式。

● 数理方程：第四章：积分变换法

例6 如果定解问题为下列第二边值问题

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & (-\infty < x < \infty, y > 0) \\ u_y(x, 0) = f(x) \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, y) = 0 \end{cases}$$

解 令 $v(x, y) = u_y(x, y)$,

$$\text{即 } u(x, y) = \int_{y_0}^y v(x, \xi) d\xi$$

容易得到 $v(x, y)$ 满足定解问题为

$$\begin{cases} v_{xx} + v_{yy} = 0 & (-\infty < x < \infty, y > 0) \\ v(x, 0) = f(x) \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} v(x, y) = 0 \end{cases}$$

● 数理方程：第四章：积分变换法

则根据上述稳定场第一边值问题公式

$$v(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi$$

故得到

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{y_0}^y v(x, \eta) d\eta = \frac{1}{\pi} \int_{y_0}^y \eta d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)}{(x - \xi)^2 + \eta^2} d\xi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) d\xi \int_{y_0}^y \frac{\eta d\eta}{(x - \xi)^2 + \eta^2} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \ln[(x - \xi)^2 + y^2] d\xi + \varphi(x) \end{aligned}$$

● 数理方程：第四章：积分变换法

4.2 拉普拉斯变换解数学物理定解问题

本节介绍另一种变换法：拉普拉斯变换法求解定解问题。

由于要作傅氏变换的函数必须定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上，故当我们讨论半无界问题时，就不能对变量 x 作傅氏变换了。

4.2.1 无界区域的问题

例4.2.1 求解无限长细杆的热传导（无热源）问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t), & (-\infty < x < \infty, t > 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases} \quad (4.2.1)$$

● 数理方程：第四章：积分变换法

【解】 先对时间 t 作拉氏变换

$$\mathcal{L}[u(x,t)] = U(x,p), \quad \mathcal{L}[f(x,t)] = F(x,p) \quad (4.2.2)$$

$$\mathcal{L}[u_t(x,t)] = pU(x,p) - u(x,0)$$

由此原定解问题中的泛定方程变为

$$\frac{d^2 U}{dx^2} - \frac{p}{a^2} U + \frac{1}{a^2} \varphi(x) + \frac{1}{a^2} F(x,p) = 0 \quad (4.2.3)$$

对方程 (4.2.3) 实施傅氏逆变换来进行求解. 利用傅氏逆变换公式

$$\mathcal{F}^{-1} \left[\frac{2}{\pi} \frac{b}{\omega^2 + b^2} \right] = e^{-b|x|}$$

● 数理方程：第四章：积分变换法

以及卷积定理 $\mathbf{F}^{-1}[F(\omega)G(\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi)g(\xi)d\xi$

得方程 (4.2.3) 的解为

$$U(x, p) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \frac{1}{2a\sqrt{p}} e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}|x-\xi|} d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, p) \frac{1}{2a\sqrt{p}} e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}|x-\xi|} d\xi \quad (4.2.4)$$

(4.2.4) 式作拉氏逆变换, 并查阅拉氏变换表,

得原定解问题 (4.2.1) 的解为

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right] d\xi \\ & + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \tau) \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right] d\tau d\xi \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

● 数理方程：第四章：积分变换法

4. 2. 2半无界区域的问题

例 2 求定解问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & (0 < x < \infty, t > 0) \\ u(x, 0) = 0, \quad u_x(0, t) = q(t) \\ |u(x, t)| < M & (0 < x < \infty, t > 0) \end{cases} \quad (4.2.6)$$

解首先作变量 t 的拉氏变换

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[u(x, t)] &= U(x, p), \quad \mathcal{L}[u_t(x, t)] = pU(x, p) - u(x, 0) \\ \mathcal{L}[q(t)] &= Q(p) \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

原定解问题即为

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U}{dx^2} - \frac{p}{a^2} U(x, p) &= 0 \\ U_x(0, p) &= Q(p), \quad |U(x, p)| < M \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

● 数理方程：第四章：积分变换法

易得到 (4.2.8) 式的解为
$$U(x, p) = C(p)e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} + D(p)e^{+\frac{\sqrt{p}}{a}x} \quad (4.2.9)$$

$$|u(x, p)| < M \quad (0 < x < \infty) \quad \longrightarrow \quad D(p) = 0 \quad (4.2.10)$$

又 $U_x(0, p) = Q(p)$ (4.2.11) 故
$$U(x, p) = -\frac{a}{\sqrt{p}} Q(p) e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} \quad (4.2.12)$$

由于
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} \quad (4.2.13) \quad \text{及拉氏变换的卷积定理}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(p)G(p)] = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \quad (4.2.14)$$

最后, 得原定解问题的解为

$$u(x, t) = -\int_0^t q(\tau) \frac{a}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau \quad (4.2.15)$$

● 数理方程：第四章：积分变换法

例3 求解在无失真条件下 ($RC = LG$)

电报方程的定解问题

$$\begin{cases} v_{xx} = LCv_{tt} + (RC + LG)v_t + RGv \\ v(x, 0) = 0, \quad v_t(x, 0) = 0 \\ v(0, t) = \varphi(t), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} v(x, t) = 0 \end{cases} \quad (4.2.16)$$

解令 $\alpha^2 = \frac{1}{LC}, \beta = \sqrt{RG}$ 并考虑到无失真条件则原方程 (4.2.16) 化为

$$v_{xx} = \frac{1}{\alpha^2} v_{tt} + \frac{2\beta}{\alpha} v_t + \beta^2 v \quad (4.2.17)$$

● 数理方程：第四章：积分变换法

若对时间 t 作拉氏变换有

$$\mathcal{L}[v(x, t)] = V(x, p), \quad \mathcal{L}[\varphi(t)] = \Phi(p)$$

于是定解问题 (4. 2. 16) 化为下列常微分方程的边值问题:

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = \left(\frac{1}{a^2} p^2 + \frac{2\beta}{\alpha} p + \beta^2 \right) V \quad (4. 2. 18)$$

$$V(0, p) = \Phi(p), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} |V(x, p)| < M$$

上述问题的解为

$$V(x, p) = C(p)e^{-\left(\frac{1}{\alpha}p + \beta\right)x} + D(p)e^{+\left(\frac{1}{\alpha}p + \beta\right)x}$$

因为

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |V(x, p)| < M$$

● 数理方程：第四章：积分变换法

所以

$$D(p) = 0.$$

$$\because V(0, p) = \Phi(p) \quad \therefore C(p) = \Phi(p)$$

于是

$$V(x, p) = \Phi(p) e^{-\left(\frac{1}{\alpha} p + \beta\right)x}$$

最后利用拉氏变换的延迟定律, 得定解问题 (4.2.16) 的解为:

$$u(x, t) = \mathcal{L}^{-1}[V(x, p)] = e^{-\beta x} \varphi\left(t - \frac{x}{\alpha}\right) u\left(t - \frac{x}{\alpha}\right)$$

或

$$u(x, t) = \begin{cases} e^{-\beta x} \varphi\left(t - \frac{x}{\alpha}\right) & t \geq \frac{x}{\alpha} \\ 0 & t < \frac{x}{\alpha} \end{cases} \quad (4.2.19)$$

The background is a light gray with a subtle grid pattern. It is decorated with several circles of different sizes and colors. There are four dark blue circles and five white circles. The white circles have a slight 3D effect with a shadow. One large white circle in the upper left contains the word "THANKS" in red, bold, sans-serif capital letters.

THANKS

Q & A ?